مجلة العلوم الطبيعية والحياتية والتطبيقية
العدد الرابع – المجلد الثاني
ديسمبر 2018 م
ISSN: 2522-3356

المجلة العربية للعلوم و نشر الأبحاث
Arab Journal of Sciences & Research Publishing
AJSRP

قابلية جمع متسلسلة فوريه المضاعفة بالطريقة $(N, p, q, \acute{p}, \acute{q})(E, 1, 1)$

عبد الهادي محمد كرزون **محمد محمود عامر**

قسم الرياضيات || كلية العلوم || جامعة البعث || سوريا

الملخص: لتكن f دالة بالمتغيرين u،v دورية بكل من u وv وقابلة للمكاملة وفق ليبيغ في المربع

$$Q : [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$$

سندرس في هذا البحث مبرهنة تتحدث عن قابلية جمع (جموعية) متسلسلة فوريه المضاعفة: $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{m,n}A_{m,n}(u,v)$ إلى الدالة f في النقطة $(u,v)=(x,y)$ وفق شروط معينة، مع التمهيديات اللازمة لإثبات هذه المبرهنة وذلك باستخدام الطريقة $(N, p, q, \acute{p}, \acute{q})(E, 1,1)$. فالهدف من البحث يكمن في إيجاد مجموع تقريبي لمتسلسلة باستخدام جداء طريقتين نظاميتين لا يمكن بأي من الطريقتين بمفردها أن نعين مجموع تقريبي لها، وللوصول إلى هدفنا المنشود تم اعتماد المنهج التحليلي والتركيبي فقد قمنا بتعريف طريقتين مضاعفتين نظاميتين ومن ثم جداءهما وتطبيق حاصل الجداء على متسلسلة مضاعفة معروفة ومهمة تتناسب مع هذا الجداء، ويمكننا الحصول على العديد من النتائج أهمها هو أن الطرائق المفردة تؤدي إلى طرائق الجداء وتتسق معها ففي حال كانت لدينا متسلسلة قابلة للجمع بطريقة مفردة فتكون هذه المتسلسلة أيضاً قابلة للجمع إلى المجموع نفسه باستخدام جداء الطريقة السابقة وأي طريقة أخرى ويكون العكس غير صحيح في الحالة العامة، علماً أن الطرائق المستخدمة نظامية هي وجداءاتها، ونخلص إلى القول بأن جداء الطرائق أقدر على جمع المتسلسلات من الطرائق نفسها.

الكلمات المفتاحية: الطريقة $(N, p, q, \acute{p}, \acute{q})$ ، الطريقة $(E, 1,1)$، متسلسلة فوريه المضاعفة.

المقدمة: [1]

لتكن $\acute{X}$ و $\acute{\acute{X}}$ مجموعتين نعرّف عليهما القياسان $\acute{\mu}$ و $\acute{\acute{\mu}}$، نرمز لفضاءات الدوال ذات المربعات القابلة للمكاملة على هاتين المجموعتين بـ $\acute{L_2}$ و $\acute{\acute{L_2}}$ على الترتيب ونعتبر على الجداء $X = \acute{X} \times \acute{\acute{X}}$ القياس $\mu = \acute{\mu} \times \acute{\acute{\mu}}$ ثم نرمز بـ L_2 لفضاء الدوال ذات المربعات القابلة للمكاملة على X المزوّد بالقياس μ. نعتبر دوال L_2 دوال ذات متغيرين.

مبرهنة: [1]

إذا كانت $\{\varphi_m\}$ و $\{\psi_n\}$ جملتين متعامدتين ومتجانستين وتامتين في $\acute{L_2}$ و $\acute{\acute{L_2}}$ على الترتيب، فإن مجموعة كل الجداءات:

$$f_{m,n}(x,y) = \varphi_m(x)\psi_n(y)$$

جملة متعامدة ومتجانسة وتامة في L_2.

لنطبق هذه المبرهنة على بعض الجمل المتعامدة الملموسة. إذا اعتبرنا فضاء الدوال ذات متغيرين:

$$f(x,y) \; ; \; -\pi \leq x, y \leq \pi$$

ذات المربعات القابلة للمكاملة، نجد أنه توجد جملة متعامدة وتامة تتألف من جداءات كل عنصر من الجملة:

$$1, cos\, mx\,, sin\, mx\,(m=1,2,3,\ldots)$$

في عنصر من الجملة:

$$1, cos\, ny\,, sin\, ny\,(m=1,2,3,\ldots)$$

أي أنها تتألف من الدوال:

$$1, cos\, mx\,, sin\, mx\,, cos\, ny\,, sin\, ny\,, cos\, mx\,.\, sin\, ny,$$
$$cos\, mx\,.\, cos\, ny\,, sin\, mx\,.\, sin\, ny\,, sin\, mx\,.\, cos\, ny$$

وبالتالي تعطى متسلسلة فورييه المضاعفة لهذه الجملة بالعلاقة [2,3,4]:

$$f(u,v)\sim\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{m,n}\big[\alpha_{m,n}\cos mu\cos nv+\beta_{m,n}\sin mu\cos nv$$
$$+\gamma_{m,n}\cos mu\sin nv+\delta_{m,n}\sin mu\sin nv\big]$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{m,n}A_{m,n}(u,v)$$

حيث:

$$\lambda_{0,0}=\frac{1}{4},\lambda_{m,0}=\frac{1}{2};m>0,\lambda_{0,n}=\frac{1}{2}\;;n>0,\lambda_{m,n}=1\;;m,n>0$$

$$\alpha_{m,n}=\frac{1}{\pi^2}\iint_H f(u,v)\cos mu\cos nv\,dudv\,;m,n=0,1,2,\ldots.$$

$$\beta_{m,n}=\frac{1}{\pi^2}\iint_H f(u,v)\sin mu\cos nv\,dudv\,;m,n=0,1,2,\ldots.$$

$$\gamma_{m,n}=\frac{1}{\pi^2}\iint_H f(u,v)\cos mu\sin nv\,dudv\,;m,n=0,1,2,\ldots.$$

$$\delta_{m,n}=\frac{1}{\pi^2}\iint_H f(u,v)\sin mu\sin nv\,dudv\,;m,n=0,1,2,\ldots.$$

ولتكن$\{p_m\}$ و$\{q_n\}$ و $\{\acute{p}_m\}$ و$\{\acute{q}_n\}$ متتاليات حقيقية موجبة متناقصة، تحقق:

$$P_m=p_0+p_1+\cdots+p_m=\sum_{i=0}^{m}p_i\to\infty\;;\;(m\to\infty)$$

$$Q_n=q_0+q_1+\cdots+q_m=\sum_{i=0}^{m}q_i\to\infty\;;\;(m\to\infty)$$

$$R_m=R(m)=p_0q_m+p_1q_{m-1}+\cdots+p_mq_0=\sum_{i=0}^{m}p_iq_{m-i}\to\infty\;;\;(m\to\infty)$$

$$\acute{P}_n=\acute{p}_0+\acute{p}_1+\cdots+\acute{p}_n=\sum_{j=0}^{n}\acute{p}_j\to\infty\;;\;(n\to\infty)$$

$$\acute{Q}_n = \acute{q}_0 + \acute{q}_1 + \cdots + \acute{q}_n = \sum_{j=0}^{n} \acute{q}_j \to \infty (n \to \infty)$$

$$\acute{R}_n = \acute{P}(n) = \acute{p}_0 \acute{q}_n + \acute{p}_1 \acute{q}_{n-1} + \cdots + \acute{p}_n \acute{q}_0 = \sum_{j=0}^{n} \acute{p}_j \, \acute{q}_{n-j} \to \infty \; ; \; (n \to \infty)$$

$$R_\sigma = R_{\left[\frac{1}{s}\right]} = R\left(\frac{1}{s}\right) = \sum_{i=0}^{\sigma} p_{m-i} q_i$$

$$\acute{R}_\tau = \acute{R}_{\left[\frac{1}{t}\right]} = \acute{R}\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{j=0}^{\tau} \acute{p}_{n-j} \acute{q}_j$$

$\tau = \left[\frac{1}{t}\right]$ دالة الجزء الصحيح لـ $\frac{1}{t}$، $\sigma = \left[\frac{1}{s}\right]$ دالة الجزء الصحيح لـ $\frac{1}{s}$.

مشكلة البحث:

تباعد متسلسلات فوريه المضاعفة وعدم كفاءة الطرائق المفردة في إيجاد مجموع بعض هذه المتسلسلات واقتصار الدراسات السابقة على دراسة قابلية جمع متسلسلة فوريه ومرافقتها باستخدام جداء طريقتين مفردتين بمتغير واحد فقط.

مواد البحث وطرائقه:

يعد نوع الدراسة في هذا البحث من حيث الاستعمال جزء مرتبط بأطروحة دكتوراه تتحدث عن قابلية جمع متسلسلات فوريه باستخدام جداء طرائق قابلية الجمع البسيطة والمضاعفة، معتمدين في ذلك على أسلوب التفكير الاستقرائي، وهو بحث كامل تفسيري من حيث النشاط والمراد من هذا البحث تعميم النتائج التي تم الحصول عليها في حالة متسلسلة فوريه بمتغير واحد، إلى حالة متسلسلة فوريه بمتغيرين، من خلال إثبات مبرهنة حول قابلية جمع هذه المتسلسلة باستخدام جداء طريقة نيورلند المعممة المضاعفة بطريقة أولر المضاعفة. ومن أهم أدوات هذا البحث الملاحظة البسيطة وبعض التعميمات والإسقاطات، إضافة إلى المصادر والوثائق المختلفة.

تعريف (1) [5,6,7] < طريقة نيورلند المعممة <(N, p, q):

تكون المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ جموعية وفق طريقة نيورلند المعممة (N, p, q) إلى

المجموع A إذا كان: $lim_{m\to\infty} t_m^{(N,p,q)} = A$ حيث إن:

$$t_m^{(N,p,q)} = \frac{1}{R_m} \sum_{i=0}^{m} p_{m-i} q_i \, s_i$$

والمتتالية $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ هي متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$

ونكتب عندئذٍ: $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = A(N, p, q)$.

وبشكل مشابه نعرف طريقة نيورلند المعممة المضاعفة $(N, p, q, \acute{p}, \acute{q})$ وفق التحويل الآتي:

$$t_{m,n}^{(N,p,q,\acute{p},\acute{q})} = \frac{1}{R_m \acute{R}_n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} p_{m-i} q_i \, \acute{p}_{n-j} \, \acute{q}_j s_{i,j}$$

تعريف (2) [5,8,9] <طريقة أولر$(E,1)$>:تكون المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ جموعية وفق طريقة أولر إلى المجموع A إذاكان $lim_{n\to\infty} t_n^{(E,1)} = A$ حيث إن:

$$t_n^{(E,1)} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k$$

والمتتالية $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ هي متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ ونكتب عندئذٍ:
$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = A\ (E,1)$

وبشكل مشابه نعرف طريقة أولر المضاعفة $(E,1,1)$ وفق التحويل الآتي:

$$t_{m,n}^{(E,1,1)} = \frac{1}{2^m 2^n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \binom{m}{i} \binom{n}{j} s_{i,j}$$

بينما يعرف تحويل جداء الطريقتين: $(N,p,q,\acute{p},\acute{q})$، $(E,1,1)$ كما يلي:

$$t_{m,n}^{(N,p,q,\acute{p},\acute{q})(E,1,1)} = \frac{1}{R_m \acute{R}_n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} p_{m-i} q_i \, \acute{p}_{n-j} \, \acute{q}_j t_{i,j}^{(E,1,1)}$$

$$= \frac{1}{R_m \acute{R}_n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} p_{m-i} q_i \, \acute{p}_{n-j} \, \acute{q}_j \frac{1}{2^i 2^j} \sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j} \binom{i}{k} \binom{j}{l} s_{k,l}$$

ولنكتب العلاقات المفيدة الآتية:

$$\phi(u,v) = \phi(x,y;u,v) = f(x+u,y+v) + f(x+u,y-v) + f(x-u,y+v) + f(x-u,y-v) - 4f(x,y)$$

$$\Phi(x,y) = \int_0^x \int_0^y \left|\phi(s,t)\right| ds dt$$

$$\Phi_1(x,t) = \int_0^x \left|\phi(s,t)\right| ds \ , \Phi_2(s,y) = \int_0^y \left|\phi(s,t)\right| dt$$

$$M_m(s) = \frac{1}{2\pi R_m} \sum_{i=0}^{m} p_{m-i} q_i \frac{cos^m\left(\frac{s}{2}\right) sin(i+1)\left(\frac{s}{2}\right)}{sin\frac{s}{2}}$$

$$N_n(t) = \frac{1}{2\pi \acute{R}_n} \sum_{j=0}^{n} \acute{p}_{n-j} \acute{q}_j \frac{cos^n\left(\frac{t}{2}\right) sin(j+1)\left(\frac{t}{2}\right)}{sin\frac{t}{2}}$$

تعريف [10,11]: نقول عن طريقة في قابلية الجمع إنها نظامية إذا أدى تطبيقها على متسلسلة متقاربة إلى مجموع هذه المتسلسلة المعتاد.

ومن الواضح أن الطريقة المضاعفة $(N,p,q,\acute{p},\acute{q})(E,1,1)$نظامية، حيث إن طريقة أولر: $(E,1,1)$ نظامية دائماً، وسنعتبر طريقة نيورلند المعممة:$(N,p,q,\acute{p},\acute{q})$ هي طريقة نظامية في هذا البحث.

إن الطريقة $(N,p,q,\acute{p},\acute{q})(E,1,1)$ نظامية لأن:

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = S \Longrightarrow \lim_{m,n\to\infty} t_{m,n}^{(E,1,1)} = S$$

حيث إن الطريقة $(E,1,1)$ نظامية، وبفرض: $t_{m,n}^{(E,1,1)} = \acute{S}_{m,n}$ يكون:

$$\lim_{m,n\to\infty} t_{m,n}^{(N,p,q,\acute{p},\acute{q})(E,1,1)} = \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{R_m \acute{R}_n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} p_{m-i} q_i \, \acute{p}_{n-j} \, \acute{q}_j t_{i,j}^{(E,1,1)}$$

$$= \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{R_m \acute{R}_n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} p_{m-i} q_i \, \acute{p}_{n-j} \, \acute{q}_j \acute{S}_{i,j} = \lim_{m,n\to\infty} \acute{t}_{m,n}^{(N,p,q,\acute{p},\acute{q})} = S$$

حيث إن $lim_{m,n\to\infty} \acute{S}_{m,n} = lim_{m,n\to\infty} t_{m,n}^{(E,1,1)} = S$ والطريقة $(N,p,q,\acute{p},\acute{q})$ نظامية.

ملاحظة: [7]

تكون طريقة نيورلند المعممة (N,p,q) نظامية إذا تحقق ما يلي :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n-k} q_k}{R_n} = 0 \ , \left| \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} q_k \right| < H|R_n|$$

حيث H عدد موجب مستقل عن n .

وبالتالي تكون طريقة نيورلند المعممة المضاعفة $(N,p,q,\acute{p},\acute{q})$ نظامية إذا تحقق ما يلي:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{p_{m-i} q_i}{R_m} = \lim_{n\to\infty} \frac{\acute{p}_{n-j} \acute{q}_j}{\acute{R}_n} = 0$$

$$\left| \sum_{i=0}^{m} p_{m-i} q_i \right| < H_1 |R_m| \, , \left| \sum_{j=0}^{n} \acute{p}_{n-j} \acute{q}_j \right| < H_2 \left| \acute{R}_n \right|$$

حيث إن:H_1 و H_2 عددين موجبين مستقلين عن m و n على الترتيب.

النتائج: مبرهنة أساسية:

لتكن$\{p_m\}$ و$\{q_n\}$ و $\{\acute{p}_m\}$ و$\{\acute{q}_n\}$ متتاليات حقيقية موجبة متناقصة، ولنضع:

$$\Phi(x,y) = \int_0^x \int_0^y |\phi(s,t)| ds dt = o\left(\frac{x}{\alpha\left(\frac{1}{x}\right)} \frac{y}{\beta\left(\frac{1}{y}\right)} \right)$$

$$\int_0^{\pi} \Phi_1(x,t) dt = o\left(\frac{x}{\alpha\left(\frac{1}{x}\right)} \right) \ ; x \to +0$$

$$\int_0^{\pi} \Phi_2(s,y) ds = o\left(\frac{y}{\beta\left(\frac{1}{y}\right)} \right) ; y \to +0$$

و$\alpha(x)$ و$\beta(y)$ دوال موجبة متزايدة تماماً تحقق:

$$\lim_{m\to\infty} \alpha(m) = \infty \, , \lim_{n\to\infty} \beta(n) = \infty$$

$$\lim_{m\to\infty}\int_1^m \frac{R_{[s]}}{s\alpha(s)}ds = O(R_m), \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{\acute{R}_{[t]}}{t\beta(t)}dt = O(\acute{R}_n)$$

عندئذٍ فإن متسلسلة فوريه المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{m,n}A_{m,n}(u,v)$ تكون قابلة للجمع بالطريقة المضاعفة $(N,p,q,\acute{p},\acute{q})(E,1,1)$ إلى الدالة: $f(x,y)$.

تمهيديات [5]: لإثبات المبرهنة نحتاج التمهيديات الآتية:

تمهيدية (1): $M_m(s) = O(m)\ ; 0 < s \le \frac{1}{m}$

تمهيدية (2): $N_n(t) = O(n)\ ; 0 < t \le \frac{1}{n}$

تمهيدية (3): $M_m(s) = O\left(\frac{R_\sigma}{sR_m}\right)\ ; 0 < \frac{1}{m} < s \le \pi$

تمهيدية (4): $N_n(t) = O\left(\frac{\acute{R}_\tau}{t\acute{R}_n}\right)\ ; 0 < \frac{1}{n} < t \le \pi$

المناقشة: إثبات المبرهنة: من المعلوم أن متتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة فوريه المضاعفة تأخذ الشكل [2,3]:

$$s_{m,n}(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \phi(s,t)\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\frac{s}{2}}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dsdt$$

عندئذٍ:

$$E_{m,n}^{1,1}(x,y) = t_{m,n}^{(E,1,1)}(x,y) = \frac{1}{2^m2^n}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{i}\binom{n}{j}s_{i,j}$$

$$= f(x,y) + \frac{1}{4\pi^2 2^m 2^n}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\phi(s,t)}{\sin\frac{s}{2}\sin\frac{t}{2}}$$

$$\times\left\{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)s\,\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)t\right\}dsdt$$

$$= f(x,y) + \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \phi(s,t)\frac{\cos^m\left(\frac{s}{2}\right)\sin(m+1)\left(\frac{s}{2}\right)}{\sin\frac{s}{2}}\frac{\cos^n\left(\frac{t}{2}\right)\sin(n+1)\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}dsdt$$

حيث إن: $\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)s = 2^m\cos^m\left(\frac{s}{2}\right)\sin(m+1)\left(\frac{s}{2}\right)$

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)s\,\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)t =$$

$$2^m2^n\cos^m\left(\frac{s}{2}\right)\sin(m+1)\left(\frac{s}{2}\right)\cos^n\left(\frac{t}{2}\right)\sin(n+1)\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$t_{m,n}^{(N,p,q,\acute{p},\acute{q})(E,1,1)}(x,y) = f(x,y) +$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{R_m\acute{R}_n}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}p_{m-i}q_i\acute{p}_{n-j}\acute{q}_j\phi(s,t)\frac{cos^m\left(\frac{s}{2}\right)sin(m+1)\left(\frac{s}{2}\right)}{sin\frac{s}{2}}\frac{cos^n\left(\frac{t}{2}\right)sin(n+1)\left(\frac{t}{2}\right)}{sin\frac{t}{2}}dsdt$$

إذا أثبتنا أن: $t_{m,n}^{(N,p,q,\acute{p},\acute{q})(E,1,1)}(x,y)-f(x,y)=o(1)\,;m\to\infty,n\to\infty$ يتم المطلوب.

لدينا:

$$t_{m,n}^{(N,p,q,\acute{p},\acute{q})(E,1,1)}(x,y)-f(x,y)=$$

$$=\left(\int_0^{\delta}\int_0^{\xi}+\int_0^{\delta}\int_{\xi}^{\pi}+\int_{\delta}^{\pi}\int_0^{\xi}+\int_{\delta}^{\pi}\int_{\xi}^{\pi}\right)\phi(s,t)M_m(s)N_n(t)dsdt$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4$$

$$I_1=\left(\int_0^{\frac{1}{m}}\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_0^{\frac{1}{m}}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi}+\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi}\right)\phi(s,t)M_m(s)N_n(t)dsdt$$

$$=I_{1.1}+I_{1.2}+I_{1.3}+I_{1.4}$$

حيث إنه، من أجل $0<s\leq\delta<1\,,0<t\leq\xi<1$، وباستخدام التمهيديتين(1) و(2) يكون:

$$I_{1.1}=O(mn)\int_0^{\frac{1}{m}}\int_0^{\frac{1}{n}}\left|\phi(s,t)\right|dsdt=O(mn)\,\Phi\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$$

$$=O(mn)o\left(\frac{1}{mn\alpha(m)\beta(n)}\right)=o(1)\,;m\to\infty,n\to\infty$$

$$I_{1.2}\leq|I_{1.2}|\leq\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_0^{\frac{1}{n}}\left|\phi(s,t)\right||M_m(s)||N_n(t)|dsdt$$

$$\leq\int_0^{\frac{1}{n}}|N_n(t)|dt\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\left|\phi(s,t)\right|\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{sR_m}ds=\int_0^{\frac{1}{n}}O(n)dt\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\left|\phi(s,t)\right|\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{sR_m}ds$$

$$=O(n)\left(\int_0^{\frac{1}{n}}dt\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\left|\phi(s,t)\right|\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{sR_m}ds\right)$$

نكامل بالتجزئة بالنسبة إلى s: $dv=\left|\phi(s,t)\right|ds\,,u=\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{sR_m}$، نجد أن:

$$= O(n)\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{\delta R_m}\Phi_1(\delta,t)dt + O(n)\frac{R_m}{\frac{1}{m}R_m}\int_0^{\frac{1}{n}} \Phi_1\left(\frac{1}{m},t\right)dt$$

$$+O(n)\int_0^{\frac{1}{n}} dt\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{sR_m}\right)|\Phi_1(s,t)|ds = \sum_{k=0}^{3} I_{1.2.k}$$

$$I_{1.2.1}+I_{1.2.2} = O(n)\frac{1}{\delta}\int_0^{\frac{1}{n}}\Phi_1(\delta,t)dt + O(mn)\int_0^{\frac{1}{n}}\Phi_1\left(\frac{1}{m},t\right)dt =$$

$$O(n)\frac{1}{\delta}\Phi\left(\delta,\frac{1}{n}\right) + O(mn)\Phi\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$$

$$= O(n)\frac{1}{\delta}o\left(\frac{\delta}{\alpha\left(\frac{1}{\delta}\right)}\frac{1}{n\beta(n)}\right) + O(mn)o\left(\frac{1}{mn\alpha(m)\beta(n)}\right)$$

$$= o(1) + o(1)\,; m\to\infty, n\to\infty$$

حيث إن: $\int_0^{\frac{1}{n}}\Phi_1(s,t)dt = \int_0^{\frac{1}{n}}\left(\int_0^{s}\phi(r,t)dr\right)dt = \Phi\left(s,\frac{1}{n}\right)$

$$I_{1.2.3} = O(n)\int_0^{\frac{1}{n}} dt\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\Phi_1(s,t)\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{s^2R_{\mathrm{m}}}ds + O(n)\int_0^{\frac{1}{n}} dt\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\frac{\Phi_1(s,t)}{s}\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{R_{\mathrm{m}}}\right)ds$$

$$\le O(n)\left(\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\left(\int_0^{\frac{1}{n}}\Phi_1(s,t)dt\right)\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{s^2R_{\mathrm{m}}}ds\right)$$

$$+ O(n)\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\left(\int_0^{\frac{1}{n}}\Phi_1(s,t)dt\right)\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{s^2R_{\mathrm{m}}}\right)ds$$

لكن: $\int_0^{\frac{1}{n}}\Phi_1(s,t)dt = \Phi\left(s,\frac{1}{n}\right)$، وبالتالي فإن:

$$I_{1.2.3} = O(n)\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\Phi\left(s,\frac{1}{n}\right)\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{s^2R_{\mathrm{m}}}ds + O(n)\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\Phi\left(s,\frac{1}{n}\right)\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{s^2R_{\mathrm{m}}}\right)ds$$

$$= O(n)\int_{\frac{1}{m}}^{\delta} o\left(\frac{s}{\alpha\left(\frac{1}{s}\right)}\frac{1}{n\beta(n)}\right)\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{s^2R_{\mathrm{m}}}ds$$

$$+ O(n)\int_{\frac{1}{m}}^{\delta} o\left(\frac{s}{\alpha\left(\frac{1}{s}\right)}\frac{1}{n\beta(n)}\right)\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{s^2R_{\mathrm{m}}}\right)ds$$

$$= o\left(\frac{1}{\beta(n)}\right)\left(\int_{\frac{1}{\delta}}^{m}\frac{R_{[s]}}{s\alpha(s)R_{\mathrm{m}}}ds\right) + o\left(\frac{1}{\beta(n)}\right)\left(\int_{\frac{1}{\delta}}^{m}\frac{1}{\alpha(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{R_{[s]}}{R_{\mathrm{m}}}\right)ds\right)$$

$$= o\left(\frac{1}{\beta(n)}\right)\left(\int_{1}^{m}\frac{R_{[s]}}{s\alpha(s)R_{\mathrm{m}}}ds\right) + o\left(\frac{1}{\beta(n)}\right)\left(\int_{1}^{m}\frac{1}{\alpha(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{R_{[s]}}{R_{\mathrm{m}}}\right)ds\right)$$

$$= o\left(\frac{1}{\beta(n)}\right)O(1) + o\left(\frac{1}{\alpha(1)\beta(n)}\right)\left(\frac{R(m)}{R_{\mathrm{m}}}\right)$$

$$= o(1)\,; m,n \to \infty$$

وبالتالي فإن: $I_{1.2} = o(1)\,; m,n \to \infty$

بشكل مشابه نجد أيضاً أن: $I_{1.3} = o(1)\,; m,n \to \infty$

الآن ومن التمهيديتين(3) و(4)، يكون لدينا: $|I_{1.4}| = O\left(\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi}|\phi(s,t)|\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{sR_m}\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{t\acute{R}_n}dtds\right)$

نكامل بالتجزئة بالنسبة للمتحولين s و t، نفرض: $u(s,t) = \frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{sR_m}\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{t\acute{R}_n}$

$$\Longrightarrow du(s,t) = \frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{sR_m}\right)\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{t\acute{R}_n}ds + \frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{sR_m}.\frac{d}{dt}\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{t\acute{R}_n}\right)dt$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}v(s,t)dsdt = \left|\phi(s,t)\right|dtds \Longrightarrow v(s,t) = \Phi(s,t)$$

عندئذٍ:

$$|I_{1.4}| = O\left(\frac{R\left(\frac{1}{\delta}\right)\acute{R}\left(\frac{1}{\xi}\right)\Phi(\delta,\xi)}{R_m\acute{R}_n\delta\xi} - \frac{m\acute{R}\left(\frac{1}{\xi}\right)\Phi\left(\frac{1}{m},\xi\right)}{\acute{R}_n\xi}\right.$$

$$-\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\acute{R}_n\xi}\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\Phi(s,\xi)\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{sR_m}\right)ds - \frac{nR\left(\frac{1}{\delta}\right)\Phi\left(\delta,\frac{1}{n}\right)}{R_m\delta}$$

$$+mn\Phi\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right) + n\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\Phi\left(s,\frac{1}{n}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{sR_m}\right)ds$$

$$+\frac{R\left(\frac{1}{\delta}\right)}{R_m\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi}\Phi(s,t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{t\acute{R}_n}\right)dt - m\int_{\frac{1}{n}}^{\xi}\Phi\left(\frac{1}{m},t\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{t\acute{R}_n}\right)dt$$

$$\left.-\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi}\Phi(s,t)\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{sR_m}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{t\acute{R}_n}\right)dsdt\right) = \sum_{k=1}^{9} I_{1.4.k}$$

$$I_{1.4.1} = O\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{\xi}\right)R\left(\frac{1}{\delta}\right)\Phi(\delta,\xi)}{R_m\acute{R}_n\delta\xi}\right) = \frac{\acute{R}\left(\frac{1}{\xi}\right)R\left(\frac{1}{\delta}\right)}{R_m\acute{R}_n\delta\xi}\,o\left(\frac{\delta}{\alpha\left(\frac{1}{\delta}\right)}\cdot\frac{\xi}{\beta\left(\frac{1}{\xi}\right)}\right)$$

$$= o\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{\xi}\right)R\left(\frac{1}{\delta}\right)}{R_m\acute{R}_n\alpha\left(\frac{1}{\delta}\right)\beta\left(\frac{1}{\xi}\right)}\right) = o(1)\,; m,n\to\infty$$

$$I_{1.4.2} = -O\left(-\frac{m\acute{R}\left(\frac{1}{\xi}\right)\Phi\left(\frac{1}{m},\xi\right)}{\acute{R}_n\xi}\right) = o\left(m\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\acute{R}_n}\left(\frac{1}{m\alpha(m)}\frac{\xi}{\beta\left(\frac{1}{\xi}\right)}\right)\right)$$

$$= o\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\acute{R}_n}\frac{1}{\alpha(m)}\frac{\xi}{\beta\left(\frac{1}{\xi}\right)}\right) = o(1)\left(\frac{1}{\acute{R}_n\alpha(m)}\right)$$

$$= o(1)\,; m,n\to\infty$$

الآن:

$$I_{1.4.3} = -\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\acute{R}_n\xi}\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\Phi(s,\xi)\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{sR_m}\right)ds$$

$$= o\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\acute{R}_n\xi}\right)\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\left(\frac{s}{\alpha\left(\frac{1}{s}\right)}\frac{\xi}{\beta\left(\frac{1}{\xi}\right)}\right)\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{s^2R_m}\right)ds$$

$$+ o\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\acute{R}_n\xi}\right)\int_{\frac{1}{m}}^{\delta} o\left(\frac{s}{\alpha\left(\frac{1}{s}\right)}\frac{\xi}{\beta\left(\frac{1}{\xi}\right)}\right)\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{R_m}\right)ds$$

$$= o\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\acute{R}_n\beta\left(\frac{1}{\xi}\right)}\right)\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{s\alpha\left(\frac{1}{s}\right)R_m}ds + o\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\acute{R}_n\beta\left(\frac{1}{\xi}\right)}\right)\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\frac{1}{\alpha\left(\frac{1}{s}\right)}\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{R_m}\right)ds$$

$$= o\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\acute{R}_n\beta\left(\frac{1}{\xi}\right)}\right)\int_{\frac{1}{\delta}}^{m}\frac{R_{[s]}}{s\alpha(s)R_m}ds + o\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\acute{R}_n\beta\left(\frac{1}{\xi}\right)}\right)\int_{\frac{1}{\delta}}^{m}\frac{1}{\alpha(s)}d\left(\frac{R_{[s]}}{R_m}\right)$$

$$= o\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\acute{R}_n\beta\left(\frac{1}{\xi}\right)}\right)O(1) + o\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\acute{R}_n\beta\left(\frac{1}{\xi}\right)}\right)O(1) = o(1)\,; m,n \to \infty$$

وبالتالي نكون قد حصلنا على: $I_{1.4.3} = o(1)\,; m,n \to \infty$

وبشكل مشابه يكون لدينا: $I_{1.4.4} = o(1)\,; m,n \to \infty$

$$I_{1.4.5} = mnB_{n,n}A_{m,m}\Phi\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right) = \mathrm{o}\left(mn\frac{1}{mn\alpha(m)\beta(n)}\right)$$
$$= o(1)\,; m,n \to \infty$$

الآن: $I_{1.4.6} = n\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\Phi\left(s,\frac{1}{n}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{sR_m}\right)ds$

$$= n\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\Phi\left(s,\frac{1}{n}\right)\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{s^2R_m}ds + n\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\Phi\left(s,\frac{1}{n}\right)\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{R_m}\right)ds$$

$$= n\int_{\frac{1}{m}}^{\delta} o\left(\frac{s}{\alpha\left(\frac{1}{s}\right)}\frac{1}{n\beta(n)}\right)\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{s^2R_m}ds + n\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\mathrm{o}\left(\frac{s}{\alpha\left(\frac{1}{s}\right)}\frac{1}{n\beta(n)}\right)\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{R_m}\right)ds$$

$$= \mathrm{o}\left(\frac{1}{\beta(n)}\right)\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{s\alpha\left(\frac{1}{s}\right)R_m}ds + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\beta(n)}\right)\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\frac{1}{\alpha\left(\frac{1}{s}\right)}\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{R_m}\right)ds$$
$$= o(1)\,; m,n \to \infty$$

وبشكل مشابه لإيجاد $I_{1.4.3}$، نجد أن: $I_{1.4.7} = o(1)\,; m,n \to \infty$

أيضاً بشكل مشابه لإيجاد $I_{1.4.6}$، نجد أن: $I_{1.4.8} = o(1)\ ; m,n \to \infty$

وأخيراً:

$$I_{1.4.9} = O\left(\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi} \Phi(s,t)\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{sR_m}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{t\acute{R}_n}\right)dsdt\right)$$

$$= O\left\{\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi} \Phi(s,t)\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{s^2R_m} + \frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{R_m}\right)\right)\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\acute{R}_n} + \frac{1}{t}\frac{d}{dt}\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{\acute{R}_n}\right)dtds\right\} = \sum_{k=0}^{4} I_{1.4.9.k}$$

$$I_{1.4.9.1} = O\left(\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi} \Phi(s,t)\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{s^2R_m}\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\acute{R}_n}\right)dtds\right)$$

$$= o\left(\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi} \left(\frac{s}{\alpha\left(\frac{1}{s}\right)}\frac{t}{\beta\left(\frac{1}{t}\right)}\right)\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{s^2R_m}\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\acute{R}_n}dtds\right)$$

$$= o\left(\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi} \frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{s\alpha\left(\frac{1}{s}\right)R_m}\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{t\beta\left(\frac{1}{t}\right)\acute{R}_n}dtds\right)$$

$$= o\left(\int_{\frac{1}{\delta}}^{m}\frac{R_{[s]}}{s\alpha(s)R_m}ds\int_{\frac{1}{\xi}}^{n}\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{t\beta(t)\acute{R}_n}dt\right) = o(1)\ ;\ m,n \to \infty$$

$$I_{1.4.9.2} = O\left(\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi} \Phi(s,t)\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{s^2R_m}\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{\acute{R}_n}\right)dtds\right)$$

$$= O\left(\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi} o\left(\frac{s}{\alpha\left(\frac{1}{s}\right)}\frac{t}{\beta\left(\frac{1}{t}\right)}\right)\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{s^2R_m}\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{\acute{R}_n}\right)dtds\right)$$

$$= o\left(\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi} \frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{s\alpha\left(\frac{1}{s}\right)R_m\beta\left(\frac{1}{t}\right)} \frac{d}{dt}\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{\acute{R}_n}\right) dtds\right)$$

$$= o\left(\int_{\frac{1}{\delta}}^{m} \frac{R_{[s]}}{s\alpha(s)R_m} ds \int_{\frac{1}{n}}^{\xi} \frac{1}{\beta(t)} \frac{d}{dt}\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{\acute{R}_n}\right) dt\right)$$

$$= o(1)\int_{\frac{1}{n}}^{\xi} O(1)\frac{d}{dt}\left(B_{n,\left[\frac{1}{t}\right]}\right) dt = o(1)\,; m,n \to \infty$$

بشكل مشابه نجد أن: $I_{1.4.9.3} = o(1)\,; m,n \to \infty$

كما أن: $I_{1.4.9.4} = O\left(\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi} \Phi(s,t)\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{R_m}\right)\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{\acute{R}_n}\right) dtds\right)$

$$= o\left(\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi} \left(\frac{s}{\alpha\left(\frac{1}{s}\right)}\frac{t}{\beta\left(\frac{1}{t}\right)}\right)\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{R_m}\right)\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{\acute{R}_n}\right) dtds\right)$$

$$= o\left(\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi} \left(\frac{1}{\alpha\left(\frac{1}{s}\right)\beta\left(\frac{1}{t}\right)}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{R_m}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{\acute{R}_n}\right) dtds\right)$$

$$= o\left(\int_{\frac{1}{m}}^{\delta} \frac{1}{\alpha\left(\frac{1}{s}\right)}\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{R_m}\right) ds \int_{\frac{1}{n}}^{\xi} \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{t}\right)}\frac{d}{dt}\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{\acute{R}_n}\right) dt\right)$$

$$I_{1.4.9.4} = o\left(\int_{\frac{1}{m}}^{\delta} o(1)\frac{d}{ds}\left(\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{R_m}\right) ds \int_{\frac{1}{n}}^{\xi} o(1)\frac{d}{dt}\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{\acute{R}_n}\right) dt\right)$$

$$= o(1).\left[\frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{R_m}\right]_{\frac{1}{m}}^{\delta} . \left[\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{\acute{R}_n}\right]_{\frac{1}{n}}^{\xi} = o(1)\,; m,n \to \infty$$

وبالتالي فإن: $I_{1.4} = o(1)\,; m,n \to \infty$

وبالتالي: $I_1 = o(1)\,; m,n \to \infty$

وبما أن: $\frac{1}{m} < \delta < \pi\,, \frac{1}{n} < \xi < \pi$، فإن:

$$I_3 \leq |I_3| \leq \int_{\delta}^{\pi} |M_m(s)| ds \int_{0}^{\frac{1}{n}} \left|\phi(s,t)\right| |N_n(t)| dt +$$
$$+ \int_{\delta}^{\pi} |M_m(s)| ds \int_{\frac{1}{n}}^{\xi} \left|\phi(s,t)\right| |N_n(t)| dt$$
$$= I_{3.1} + I_{3.2}$$

باستخدام التمهيديتين (2) و (3)، يكون:

$$I_{3.1} = O\left(\int_{\delta}^{\pi} \frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{sR_m} ds \int_{0}^{\frac{1}{n}} \left|\phi(s,t)\right| \frac{1}{t} dt \right) = O(n) \left(\int_{\delta}^{\pi} \frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{sR_m} ds \int_{0}^{\frac{1}{n}} \left|\phi(s,t)\right| dt \right)$$
$$= O(n) \int_{0}^{\pi} \Phi_2\left(s, \frac{1}{n}\right) ds = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\beta(n)}\right) = o(1) \; ; n \to \infty$$

ومن التمهيديتين (3) و(4)، يكون لدينا:

$$I_{3.2} = O\left(\int_{\delta}^{\pi} \frac{R\left(\frac{1}{s}\right)}{sR_m} ds \int_{\frac{1}{n}}^{\xi} \left|\phi(s,t)\right| \frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{t\acute{R}_n} dt \right)$$

نكامل بالتجزئة: $u = \frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{t\acute{R}_n}, dv = \left|\phi(s,t)\right| dt$، فيكون:

$$I_{3.2} = O\left(\int_{\delta}^{\pi} ds \left\{ \Phi_2(s,t) \frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{t\acute{R}_n} \right]_{\frac{1}{n}}^{\xi} - \int_{\frac{1}{n}}^{\xi} \Phi_2(s,t) \frac{d}{dt}\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{t\acute{R}_n} \right) dt \right\} \right)$$
$$= O\left[\int_{\delta}^{\pi} ds \left\{ \Phi_2(s,\xi) \frac{\acute{R}\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\xi\acute{R}_n} - \Phi_2\left(s, \frac{1}{n}\right) n \right\} \right] +$$
$$+ O\left[\int_{\delta}^{\pi} ds \int_{\frac{1}{n}}^{\xi} \Phi_2(s,t) \frac{d}{dt}\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{t\acute{R}_n} \right) dt \right]$$
$$= O\left[\int_{\delta}^{\pi} \Phi_2(s,\xi) \frac{\acute{R}\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\xi\acute{R}_n} ds \right] + O(n) \int_{\delta}^{\pi} \Phi_2\left(s, \frac{1}{n}\right) ds +$$

$$O\left[\int_{\delta}^{\pi} ds \int_{\frac{1}{n}}^{\xi} \Phi_2(s,t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{t\acute{R}_n}\right)dt\right]$$

$$= O\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\xi\acute{R}_n}\right)\int_{\delta}^{\pi}\Phi_2(s,\xi)ds + O(n)o\left(\frac{1}{n\beta(n)}\right)$$

$$+ O\left[\int_{\delta}^{\pi} ds \int_{\frac{1}{n}}^{\xi} \Phi_2(s,t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\acute{R}\left(\frac{1}{t}\right)}{t\acute{R}_n}\right)dt\right]$$

وبنفس الأسلوب المتبع في إيجاد $I_{1.4.9}$، نستطيع أن نكتب:

$$I_{3.2} = o(1) + o(1) + o(1) = o(1)\ ; m,n \to \infty$$

لذلك فإن: $I_3 = o(1)\ ; m,n \to \infty$

وبالمثل نجد: $I_2 = o(1)\ ; m,n \to \infty$

ومن الشروط النظامية للطريقة المضاعفة $(N,p,q,\acute{p},\acute{q})(E,1,1)$ وبالاستناد إلى مبرهنة ريمان-ليبيغ، يكون لدينا: $I_4 = o(1)\ ; m,n \to \infty$ وهو المطلوب.

الخلاصة:

في هذا البحث قمنا بدراسة جداء طريقتين مضاعفتين من طرائق قابلية الجمع، وتمكنّا بواسطته من إيجاد مجموع تقريبي لمتسلسلة فوريه المضاعفة (الثنائية)، علماً أن هذه المتسلسلة ليست متقاربة في الحالة العامة.

التوصيات:

نوصي بدراسة قابلية جمع مشتقات متسلسلات فوريه البسيطة والمضاعفة والثلاثية باستخدام جداء طرائق قابلة الجمع المختلفة، كطرائق سيزارو (C,α) وهولدر H^{α} ونيورلند (N,p_n) والطرائق التوافقية (H,k) وغيرها.

المراجع:

1- كولموغوروف. أ، فومين. س، مبادئ في نظرية التوابع وفي التحليل التابعي، تعريب أبو بكر خالد سعد الله، 1973.

2- S. Lal, " Double Matrix Summability of Double Fourier Series ",Int. Journal of Math. Analysis,3,34, 1669-1681, 2009.

3- S. Lal, V. N. Tripathi, " On The Study of Double Fourier Series By Double Matrix Summability Method ",Tamkang Journal of Mathematics,34,1,1-15, 2003.

4- Georgi P. Tolstov, Richard A. Silverman , Fourier Series, Dover Publications, INC. New York, 2012.

5- H. K. Nigam, A. Sharma, " On $(N,p,q)(E,1)$ Summability of Fourier Series", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences,2009, 1-8, 2009.

6- B.P.Padhy, S.K.Buxi, U.K.Misra and M.Misra, " on $(N,p,q)(E,z)$ product summability of fourier series", Asian Journal of Current Engineering and Maths, 1, 3, 159-161, 2012.

7- N.Singh, N.Sharma, " On(N,p,q) Summability Factors of Infimite Series ", Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.),110, 1,61-68, 2000.

8- Tuncer Acar, S.A. Mohiuddine, " Statistical $(C,1)(E,1)$ Summability and Korovkin's Theorem ",Published by Faculty of Sciences and Mathematics,30,2, 387-393, 2016.

9- H. K. Nigam, " on $(C,2)(E,1)$ product means of fourier series and its conjugate series", Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications,1,2, 334-344, 2013.

10- وايدر دافيد، الحساب المتقدم، ترجمة الدكتور أنيس كنجو، 1981-1982.

11- كريزيك إيروين، مدخل إلى التحليل الدالي، ترجمة الدكتور خضر حامد الأحمد، 1985.

On Summability Of Double Fourier Series By $(N,p,q,\acute{p},\acute{q})(E,1,1)$

Abstract: Let f be a function of two variables u,v, periodic with respect to u and with respect to v, in each case with period 2π, and summable in the square

$Q:[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$.In this reserchewe will proof theorem.

The first study summability of the Double Fourier series

$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{m,n}A_{m,n}(u,v)$to fat point $(u,v)=(x,y)$ within a certain condition, and we put the necessary lemmas for this theorem by method $(N,p,q,\acute{p},\acute{q})(E,1,1)$. The objective of the research is to find a rough approximation of the series using two regular methods. Neither of the two methods can assign an approximate sum. In order to reach our desired goal, the analytical and synthetic method was adopted. We defined two regular Double methods and then applied them and applied the product to a known double series And a task commensurate with this task, and we can get many results, the most important of which is that the individual methods lead to the methods of the product and consistent with it, if we have a series can be summability in a single way, this series can also be summability to the same total plow And the opposite is not true in the general case, Knowing that the methods used and their products are regular. In conclusion, we can say that methods product are better able to collect the series than the methods themselves.

Keywords: $(N,p,q,\acute{p},\acute{q})$ method,$(N,p,q,\acute{p},\acute{q})$method, Double Fourier series.