مجلة العلوم الطبيعة
و الحياتية والتطبيقية
العدد الأول – المجلد الأول
مارس 2017
ISSN: 2518-5780

المجلة العربية للعلوم و نشر الأبحاث
Arab Journal of Sciences & Research Publishing
AJSRP

السلوك التقاربي لحلول المتباينات المكافئية باستخدام المعيار المنتظم

صالح محمود بولعراس1، محمد حيور2 ، خالد حسين زنير و البحري بلقاسم الشريف1

1 قسم الرياضيات، كلية العلوم والاداب بالرس-جامعة القصيم- المملكة العربية السعودية .

2 جامعة باجي مختار عنابة- كلية العلوم- قسم الرياضيات-الجزائر

الملخص: للمتباينات شبه الهدف من هذا المقال هو دراسة سلوك التقارب في النظيم L^∞ المتغيرة المكافئية.
T الحل المتقطع المحسوب في اللحظة L^∞ بين $u^h(T,x)$ حيث نقدر المتغير في للمسألة المستمرة في التقارب، وهكذا حصلنا تحت شروط واقعية على u^∞والحل النتيجة التالية:

$$\|w_h(T,x)-w^\infty(x)\|_{L^\infty} \le C\left[h^2|\log h|^2\|F(w)\|_\infty + \left(\frac{1+kc}{1+k\beta}\right)^N\right]$$

الكلمات المفتاحية: متباينات متغيرة مكافئية، السلوك التقاربي، الحل التقريبي، وجود ووحدانية الحل، المتباينات المتكافة، .المتباينة شبه المتغيرة التطورية، مبدأ الحد الاقصي المنفصل، ثابت لبشتز

Abstract: The paper deals with the study of the Asymptotic behavior of Solutions for the Parabolic Quasi variation inequalities and their Convergence, where we the estimate between the discrete solution calculated in the step end of the time and the asymptotic behavior solution in uniform norm was evaluated, and we get the following estimate

$$\|w_h(T,x)-w^\infty(x)\|_{L^\infty} \le C\left[h^2|\log h|^2\|F(w)\|_\infty + \left(\frac{1+kc}{1+k\beta}\right)^N\right]$$

Keywords: Asymptotic، the solutions parabolic, variation, inequalities.

1. مقدمة

يمكن لكثير من الظواهر الفيزيائية والاقتصادية أن تترجم رياضيا إلى متباينات متغيرة وشبه متغيرة مكافئية لإثبات وجود و وحدانية الحل. و تمكن الرياضيات ليونز و بينسوسان J. L. Lions & A. Benssoussan من حل هذه المتباينات وذلك في سنة 1979 في كتابهما [1]. لكن من الصعب إيجاد الحلول الدقيقة لهذه المتباينات، لذلك نلتجأ إلى الطرق العددية والتحليلية من أجل الحصول على قيم تقريبية لهذه الحلول الدقيقة [2-8].

حيث تمكن الفريق العلمي بمعالجة المسألة عدديا حين يكون الطرف الثاني للمتباينة بدلالة الحل، ولإكمال ما قام به الفريق العلمي السابق ذكره قمنا بدراسة المسألة حين يكون الطرف الثاني وأيضا الحاجز $M(u)$ للمتباينة بدلالة الحل والمسألة يمكن كتابتها بالشكل الآتي:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v-u\right) + a(u, v-u) \geq (\mathcal{f}(u), v-u) \\ u(t,x) \leq M(u) \\ u(0,x) = 0 \end{cases}$$

حيث تناولنا في هذا المقال تعريف بسيط للشكل الضعيف للمتباينات المكافئية تتخللها بعض الملاحظات والقضايا المهمة الأساسية أولها نظرية وجود و وحدانية الحل لمتباينة بسيطة ومن ثم معالجة المسألة المستمرة والمتقطعة أين يكون الحاجز و الطرف الثاني للمتباينة متعلقا بالحل و أين تحصلنا من خلال هذه الدراسة على تقدير تقريبي مثالي بين الحل المستمر والحل المتقطع عند اللحظة النهائية في مجال التغير الزمني (النظرية رقم 1.3).

2.الشكل الضعيف للمتباينات المكافئية

قدم الفريق العلمي للمتباينات التطورية، دراسة ستامباشيا و ليونز للشكل الضعيف G. stampacchia و J. L. Lions وسنقدم تمهيدا بسيطا لما قاموا به.

نفرض: V , H فضاءان لهيلبرت حقيقيان بحيث:

$$(2.1)\quad \begin{cases} V \subset H \\ V \text{ كثيف في } H \\ V \to H \text{ مستمر} \end{cases}$$

فإن: V' يرمز إلى ثنوي V إذا كان

$$(2.2)\quad V \subset H \subset V'$$

لتكن $\mathcal{f}$ دالة معطاة تحقق:

$$(2.3)\quad \mathcal{f} \in L^2(0,T;\, V')$$

نعتبر الشكل الثنائي الخطي التالي:

$$(2.4)\quad u, v \to a(u,v) \text{ مستمرعلى } V \times V$$

هنا $a(u,v)$ لا يهم تناظرها

نعرف الشكل الثنائي الخطي كما يلي:

$$a(t;u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx \qquad (2.5)$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} b_j(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} v dx + \int_{\Omega} a_0(x,t) uv dx$$

الموافق للمؤثر الخطي التالي:

$$A(t)u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} a_j(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0(x,t)u \qquad (2.6)$$

إضافة إلى الشرط التالي:

$$a(u,u) > \alpha \|u\|_V^2$$

إلى نظيم u بالنسبة إلى الفضاء X $\|u\|_X$أين نرمز بـ:

أهتم الفريق السابق في دراسته على حل المتباينة المتغيرة التالية:

أوجد الحل u حيث

$$\begin{cases} u \in L^2(0,\mathrm{T};\mathrm{V}) \cap L^\infty(0,\mathrm{T};\mathrm{H}) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \mathrm{t}}, \mathrm{v}-\mathrm{u}\right) + \mathrm{a}(\mathrm{u},\mathrm{v}-\mathrm{u}) \geq (\not{f}(\mathrm{u}),\mathrm{v}-\mathrm{u}) \\ u(.,x) = u(.,x) = \bar{u} \\ u(t,x) \leq \psi(t,x) \end{cases} \qquad (2.7)$$

فإنه سيكون غامضا بعض الشيء لكنه سيكون $u(0) = 0$إذا اعتبرنا الشرط التالي

دقيقا لو أضفنا إليه الشرط التالي:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{t}} \epsilon L^2(0,\mathrm{T};\mathrm{V}) \qquad (2.8)$$

نستطيع تقديم حلول ضعيفة كما في الحالة التالية:

حيثν نعتبر الدوال المنتظمة

$$\begin{cases} v \in L^2(0,\mathrm{T};\mathrm{V}); \ \frac{\partial u}{\partial \mathrm{t}} \epsilon\, L^2(0,\mathrm{T};\mathrm{V}) \\ v(0) = 0 \quad \text{من أجل} \quad v(\mathrm{t}) \in \mathrm{K} \end{cases} \qquad (2.9)$$

تحقق (2.7) من المتوقع أن يكون الحل منتظم كفاية.uإذا كانت

بعض الرموز.

نكتب (u,v) عوضا عن $(\mathrm{u},\mathrm{v})_H$

لدينا أن:

$$\int_0^T \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}, v-u\right) + a(u,v-u) - (f,v-u)\right] dt$$
$$= \int_0^T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v-u\right) + a(u,v-u) - (f,v-u)\right] dt$$
$$+ \int_0^T [(\partial(v-u)/\partial t, v-u)] dt$$

(2.10)

الحد الأخير في المعادلة يساوي إلى:

$\frac{1}{2}\|v(\mathrm{T})-\mathrm{u}(\mathrm{T})\|_{\mathrm{H}}^{2}$ علما أن $v(0)=0$

إذن يمكن القول إن:

$$\int_0^T\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t},v-u\right)+a(u,v-u)-(f,v-u)\right]dt\geq 0 \qquad (2.11)$$

و ذلك لكل u يحقق(2.8)

إذن نعرف الحل الضعيف لـ (2.7) كدالة تحقق:

$$u\in L^2(0,\mathrm{T};\mathrm{V});\;\; u\in K \qquad (2.12)$$

تحقق. v والتي تحقق (2.8) من أجل كل

ملاحظة 2.1:

لنتأكد من صحة (2.10)، لنأخذ في (2.10)

$$v=\theta\mathrm{w}+(1-\theta)\mathrm{u}\,;0<\theta<1$$

دالة منتظمة وتحقق الشروط المشابهة لتلك الشروط في (2.10).wحيث

نصل على θ بعد القسمة على

$$\int_0^T\left[\left(\theta\frac{\partial w}{\partial t}+(1-\theta)\frac{\partial u}{\partial t},w-u\right)+a(u,w-u)-(f,w-u)\right]dt\;\geq 0$$

نحصل على:$\theta\rightarrow 0$ إذا كانت

$$\int_0^T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t},w-u\right)+a(u,w-u)-(f,w-u)\right]dt\geq 0 \qquad (2.13)$$

من أجل $w\in L^2(0,\mathrm{T};\mathrm{V})$ حيث $w(t)\;\in K$

بأخذ

$$(2.14)w=\begin{cases} \text{v جوار } \sigma \text{ عند } t_0\in\;]0,\mathrm{T}[\\ \text{u كيفي} \end{cases}$$

نحصل على (2.11). $0 \leftarrow [\sigma]$لما

نظرية 1.2:

نعتبر ضمن هذه النظرية الشروط التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial t},\dfrac{\partial a_j}{\partial t},\dfrac{\partial a_0}{\partial t}\in L^\infty \text{ و } f,\dfrac{\partial f}{\partial t}\;\in L^2(0,\mathrm{T};L^2(\Omega)) \\ \psi,\dfrac{\partial\psi}{\partial \mathrm{t}}\in L^2(0,\mathrm{T};H^1(\Omega)),\dfrac{\partial^2\psi}{\partial \mathrm{t}^2}\in\; L^2(\Omega) \text{ و على الحافة } \psi\geq 0,\dfrac{\partial\psi}{\partial\mathrm{t}}=0 \\ \bar{u}\in H_0^1(\Omega),A(T)\bar{u}\in L^2(\Omega),\bar{u}\leq\psi(T) \end{cases}$$

وفق هذه الشروط يمكن القول أن المسألة السابقة(2.10) تقبل حل موجود ووحيد حيث:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\in L^2(0,\mathrm{T};H^1(\Omega))\sqcap L^\infty(0,\mathrm{T};L^\infty(\Omega))$$

ملاحظة 2.2:

من أجل إثبات النظرية 1.1 نرجع إلى stampacchia G.[6] و J. L. Lions

3. المسألة المستمرة:

1.3. المتراجحات شبه المتغيرة التطورية المستمرة:

ليكن K فضاء ضمني محدب يعرف جسما محدبا كالآتي:

$$K = \{ v \in V \text{ حيث } v \leq \psi \text{ حيثما كان في } \Omega \} \quad (3.1)$$

في نفسه يحقق الشرطين التاليين: L^{∞} هنا نعتبر $\boldsymbol{\Omega}$ نطاق منتظم و $\boldsymbol{S}$ مؤثر غير خطي ومستمر بالنسبة للنظيم

$$\begin{cases} S(w) \leq S(\widetilde{w}) \quad \text{لدينا } w \leq \widetilde{w} \text{ من أجل} & (3.2) \\ S(w+c) < S(w) + c & (3.3) \end{cases}$$

مع c ثابت موجب.

وبفرض أن:

$$(k \epsilon\ 0) \qquad (3.4)$$

للحصول على w الحل الخاص بالمتراجحة شبه المتغيرة التطورية التالية:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial w}{\partial t}, v - w\right) + a(w, v - w) \geq (f(w), v - w) \\ w(t, x) \leq M(w) \\ w(0, x) = 0 \end{cases} \qquad (3.5)$$

نعتبر المخطط النصف الضمني التالي:

$$\begin{cases} \int_0^{kN} \dfrac{w^n - w^{n-1}}{k}(v - w^n)dx + a(w^n, v - w^n) \geq (f(w^{n-1}), v - w^n) \\ v \leq M(w^{n-1}), & n = \overline{1, N} \\ w^n \leq M(w^{n-1}) & n = \overline{1, N} \end{cases} \qquad (3.6)$$

مع

$$k = \frac{T}{N}$$

نستطيع إعادة صياغة (3.6) كالآتي:

$$\begin{cases} b(w^n, v - w^n) \geq (F(w^{n-1}), v - w^n) \\ v \leq M(w^{n-1}) & n = \overline{1, N} \\ w^n \leq M(w^{n-1}) & n = \overline{1, N} \end{cases} \qquad (3.7)$$

حيث:

$$\begin{cases} b(w^n, v - w^n) = a(w^n, v - w^n) + \lambda \int_0^{kN} w^n (v - w^n)dx \\ F(w^{n-1}) = f(w^{n-1}) + \lambda w^{n-1} \\ \lambda = \dfrac{1}{k} \\ k = \dfrac{T}{N} \end{cases} \qquad (3.8)$$

2.3: تطبيق نظرية النقطة الثابتة على المسألة المستمرة:

ستكون الدراسة هنا في الحالة المستمرة (الحالة المتقطعة مشابهة) لذلك نعرف التطبيق التالي:

$$T_\lambda : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$$
$$w \to T_\lambda(w) = \xi_\lambda$$

حيث $\xi_\lambda \in K$ هي حل للمسألة التالية:

$$\begin{cases} b(\xi_\lambda, v - \xi_\lambda) \geq (F(w), v - \xi_\lambda) \\ v \leq M(\xi_\lambda) \\ w \leq M(\xi_\lambda) \end{cases} \quad (3.9)$$

نظرية 2.2:

التطبيقT_λ مقلص بثابت التقلص $\frac{c+\lambda}{\beta+\lambda}$ ، إذن هو يقبل نقطة صامدة وحيدت تمثل حل المسألة التالية:

$$\begin{cases} b(w^\infty, v - w^\infty) \geq (F(w^\infty), v - w^\infty) \\ v \leq M(w^\infty) \\ w^\infty \leq M(w^\infty) \end{cases} \quad (3.10)$$

أين:

$$\begin{cases} b(.,.) = a(.,.) + \lambda(.,.) \\ F(w) = f(w) + \lambda w \end{cases}$$

برهان النظرية:

بفرض أن $w, \widetilde{w}$ حلان للمسألة (3.9) و الموافقان لطرف المتراجحة $F(w)$, $F(\widetilde{w})$ على الترتيب حيث:

$$(3.11) \begin{cases} F(w) = f(w) + \lambda w \\ F(\widetilde{w}) = f(\widetilde{w}) + \lambda \widetilde{w} \end{cases}$$

نضع

$$\alpha = \frac{c}{\beta + \lambda} \|F(w) - F(\widetilde{w})\|_\infty$$

إذن α + ξ حل للمسألة التالية

$$\begin{cases} b\big(\xi + \alpha, (v + \alpha) - (\xi + \alpha)\big) \geq \big(F(w) + a_0\alpha, (v + \alpha) - (\xi + \alpha)\big) \\ \xi + \alpha \leq M(\xi) \\ v + \alpha \leq M(\xi) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (3.12)$$

لدينا:

$$\begin{aligned} F(\widetilde{w}) &\leq F(w) + \|F(w) - F(\widetilde{w})\|_\infty \\ &\leq F(w) + \frac{a_0}{\beta + \alpha} \|F(w) - F(\widetilde{w})\|_\infty \\ &\leq F(w) + a_0\alpha \end{aligned}$$

إذن:

$$\xi \leq \tilde{\xi} + \alpha$$

بنفس الطريقة يمكن إثبات أن:

$$\tilde{\xi} \le \xi + \alpha$$

إذن يمكن كتابة:

$$\begin{aligned}\|T_\lambda(w) - T_\lambda(\tilde{w})\|_\infty &\le \frac{c}{\beta+\lambda}\|F(w) - F(\tilde{w})\|_\infty \\ &\le \frac{c}{\beta+\lambda}\|f(w) + \lambda w - f(\tilde{w}) - \lambda\tilde{w}\|_\infty \\ &\le \frac{c+\lambda}{\beta+\lambda}\|w - \tilde{w}\|_\infty\end{aligned}$$

ومنه التطبيق T_λ يقبل نقطة صامدة وحيدة، إذن يمكن الجزم بأن المسألة (3.9) تقبل حل وحيد.

4. المسألة المتقطعة :

1.4 المترجحات شبه المتغيرة التطورية المتقطعة:

لإيجاد w_h حل المسألة التالية

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial w_h}{\partial t}, v_h - w_h\right) + a(w_h, v - w_h) \ge (f(w_h), v - w_h) \\ w_h(t,x) \le M(w_h), \qquad \forall v \in V^h \quad , \\ w_h(0,x) = 0\end{cases} \tag{4.1}$$

حيث:

V^h فضاء التقسيمات بواسطة طريقة العناصر المنتهية ذو كثيرات الحدود من الدرجة الأولى.

نعتبر المخطط النصف الضمني التالي:

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^{kN} \frac{w_h^n - w_h^{n-1}}{k}(v_h - w_h^n)dx + \\ \qquad + a(w_h^n, v_h - w_h^n) \ge \left(f(w_h^{n-1}), v_h - w_h^n\right) \\ v_h \le M(w_h^{n-1}), \qquad\qquad n = \overline{1,N} \\ w_h^n \le M(w_h^{n-1}) \qquad\qquad n = \overline{1,N}\end{cases} \tag{4.2}$$

يمكن إعادة صياغة الشكل (4.2) كالآتي

$$\begin{cases}b(w_h^n, v - w_h^n) \ge \left(F(w_h^{n-1}), v - w_h^n\right) \\ v_h \le M(w_h^{n-1}) \\ w_h^n \le M(w_h^{n-1})\end{cases} \tag{4.3}$$

2.4 تطبيق نظرية النقطة الثابتة على المسألة المتقطعة

ليكن التطبيق T_λ المعرف كما يلي:

$$T_{\lambda,h}: L_+^{\infty}(\Omega) \rightarrow V_h$$
$$w \rightarrow T_{\lambda,h}(w) = \xi_{\lambda,h} \qquad (4.4)$$

حيث $\xi_{\lambda,h}$ حل للمسألة المتقطعة التالية:

$$\begin{cases} b\left(\xi_{\lambda,h}, v_h - \xi_{\lambda,h}\right) \geq \left(F(w_h), v_h - \xi_{\lambda,h}\right) \\ v_h \leq M(\xi_\lambda) \\ w_h \leq M(\xi_\lambda) \end{cases}$$

نحصل على نفس النتائج كما في الحالة المستمرة فيما يخص القضية السابقة.

3.4 مبدأ الحد الأقصى المنفصل p.m.d:

نعتبر مصفوفة $a(\varphi_i, \varphi_i)$ a_{ij} ذات المعاملات $M - matrice$ نقول عنها مصفوفة

إذا حققت الشرط التالي:

$$\left(a_{ij} \leq 0, i \neq j \quad \exists A^{-1} \geq 0\right)$$

نظرية 1.4 :

. $T_{\lambda,h}$ المعرف في (3.4) تطبيق مقلص مع ثابت ليبشيتز $\frac{c+\lambda}{\beta+\lambda}$ التطبيق

إذن يقبل نقطة صامدة وحيدة تحقق المسألة التالية:

$$\begin{cases} b(w_h^{\infty}, v_h - w_h^{\infty}) \geq (F(w_h^{\infty}), v_h - w_h^{\infty}) \\ \quad v_h \leq M(w_h^{\infty}) \\ \quad w^{\infty} \leq M(w_h^{\infty}) \end{cases} \qquad (4.5)$$

الخوارزمية المنفصلة:

w_h^0 اصطلاحا نأخذ

نعرف الخوارزمية الآتية:

$$T_h w_h^n = w_h^n$$

حيث w_h^n حل للمسألة (4.2).

نحصل على التقدير الآتي:

نظرية 2.4:

$$\|w_h^n - w_h^{\infty}\|_{\infty} \leq \left(\frac{c+\lambda}{\beta+\lambda}\right)^{\mathbf{n}} \|w_{h,0} - w_h^{\infty}\|_{\infty}$$

البرهان:

بفرض:

الخطوة الأولى:

لدينا أن:

$\mathrm{T_h} w_h^{\infty} = w_h^{\infty}$

و

$\mathrm{T_h} w_h^{1} = w_h^{1}$

من أجل:

$$\left\|w_h^1 - w_h^\infty\right\|_\infty = \left\|T_h w_h^0 - T_h w_h^\infty\right\|_\infty$$
$$\leq \left(\frac{\mathrm{c}+\lambda}{\beta+\lambda}\right)\left\|w_h^0 - w_h^\infty\right\|_\infty$$

n من أجل الخطوة:

$$\|w_h^n - w_h^\infty\|_\infty \leq \left(\frac{\mathrm{c}+\lambda}{\beta+\lambda}\right)^{\mathrm{n}} \left\|w_{h,0} - w_h^\infty\right\|_\infty$$

n+1 إذن لدينا من أجل الخطوة:

$$\|T_h w_h^n - T_h w_h^\infty\|_\infty = \left\|w_h^{n+1} - w_h^\infty\right\|_\infty$$

إذن لدينا:

$$\left\|w_h^{n+1} - w_h^\infty\right\|_\infty \leq \left(\frac{\mathrm{c}+\lambda}{\beta+\lambda}\right)^{\mathrm{n+1}} \left\|w_{h,0} - w_h^\infty\right\|_\infty$$

ومنه برهان القضية السابقة.

نظرية 3.4:

$$\|w^\infty - w_h^\infty\|_\infty \leq C[h^2|\log h|^2\|F(w)\|_\infty]$$

حيث h لا يتعلق بـ C.

ملاحظة1.4

برهان القضية السابقة مفصلة في المرجع [1]

نظرية 1.4:

$$\|w_{\mathrm{h}}(\mathrm{T},\mathrm{x}) - \mathrm{w}^\infty(\mathrm{x})\|_{L^\infty} \leq C\left[h^2|\log h|^2\|F(w)\|_\infty + \left(\frac{1+kc}{1+k\beta}\right)^N\right]$$

حيث k و h لا يتعلق بـ C.

برهان:

لدينا:

$w_h^n(x) = w_{\mathrm{h}}$ من أجل $t \in](n-1)k; nk[$ (t,x)

لدينا أن:

$$w_h^N(x) = w_{\mathrm{h}}(\mathrm{T},\mathrm{x})$$

إذن:

$$\|w_{\mathrm{h}}(\mathrm{T},\mathrm{x}) - \mathrm{w}^\infty(\mathrm{x})\|_{L^\infty(\Omega)} = \left\|w_h^N(x) - \mathrm{w}^\infty(\mathrm{x})\right\|_{L^\infty(\Omega)}$$
$$\leq \left\|w_h^N - w_h^\infty\right\|_{L^\infty(\Omega)} + \|w_h^\infty - \mathrm{w}^\infty\|_{L^\infty(\Omega)}$$

استنادا على القضيتين السابقتين لدينا:

$$\|w^{\infty}-w_h^{\infty}\|_{\infty}\leq C[h^2|\log h|^2\|F(w)\|_{\infty}]$$

و

$$\|w_h^n-w_h^{\infty}\|_{\infty}\leq\left(\frac{c+\lambda}{\beta+\lambda}\right)^{\mathbf{n}}\|w_{h,0}-w_h^{\infty}\|_{\infty}$$

وباستعمال:

$$k=\ T/N$$

نحصل على:

$$\|w_{\mathrm{h}}(\mathrm{T},\mathrm{x})-\mathrm{w}^{\infty}(\mathrm{x})\|_{L^{\infty}}\leq C\left[h^2|\log h|^2\|F(w)\|_{\infty}+\left(\frac{1+kc}{1+k\beta}\right)^{N}\right]$$

5. خلاصة :

في هذا المقال حصلنا على نتيجة تقريبية منتظمة مثلى، وإننا إذ نتابع عن كثب من خلال المحاكاة العددية في التطبيقات الملموسة في بعض المسائل منها :

- تسيير نظام البورصة.
- مسائل إيداعات وتسيير الموارد النفطية.
- كما يمكن أيضا أن نوسع نفس التقريب في مسائل أخرى مهمة مثل جمل شبه المتغيرة المتعلقة بنظرية الألعاب.

قائمة المراجع :

[1] Bensoussan, Lions. A J.L, Applications des inequations variationnelles en controle stochastique, Dunod Paris, 1984.

[2] Boulbrachene. : M., Sur quelque question d'approximation de problème à frontière libre, de sous-domaines et d'erreurs d'arrondi.Thèse de doctorat de l'université de France-comté Besançon, France (1987).

[3] Boulaaras. S., Haiour. M., L∞-asymptotic behavior for a .nite element approximation in parabolic quasi-variational inequalities related to impulse control problem, Applied Mathematics and Computation, 217 (2011), 6443.6450.

[4] Boulaaras. S., Haiour. M., The .nite element approximation of evolutionary Hamilton.Jacobi. Bellman equations with nonlinear source terms, Indagationes Mathematicae, 24 (2013), 161-173.

[5] Boulaaras. S., Haiour. M., The theta time scheme combined with a .nite element spatial approximation of Hamilton-Jacobi-Bellman equation, , Computational Mathematics and Modeling, 25(2014), 423-438.

[6] Boulaaras. S., Haiour. M., A new proof for the existence and uniqueness of the discrete evolutionary HJB equation, Applied Mathematics and Computation, 262 (2015) 42.55.
[7] Boulbrachene, M, Haiour. M, The .nite element approximation of Hamilton Jacobi Bellman equations, Computers and Mathematics with Applications, 41(2001), 993-1007.
[8] Ciarlet. P, Raviart. P., Maximum principle and uniform convergence for the .nite element method. Com. Math. in Appl. Mech. and Eng, 2 (1973), 1-20.
[9] Cortey-Dumont. P., Sur l. analyse numerique des equations de Hamilton-Jacobi-Bellman, Math. Meth. in Appl. Sci., (1987).
[10] Cortey-Dumont. P,, On the .nite element approximation in the L1-norm of variational inequalities with nonlinear operators, Numer.Num., 47 (1985), 45-57.
[11]Evans. L. C., Classical solutions of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation for uniformly elliptic operators, Transactions of the American Mathematical Society 275 (1983), 245-255.
[12] Evans, L. C., Friedman. A., Optimal stochastic switching and the Dirichlet problem for the Bellman equations, Transactions of the American Mathematical Society 253 (1979), 365-389.
[13] Lions. P. L., Menaldi. J. L., Optimal control of stochastic integrals and Hamilton Jacobi Bellman equations, (Part I), SIAM Control and Optimtiation 20(1979).
[14] Lions. P. L., Menaldi. J. L., Approximation numérique des equations de Hamilton Jacobi Bellman, RAIRO, Anal. Num. 14(1980), 369-393.
[15] P. L. Lions & G. Stampacchia.Variational inequalities.Comm.Pure Appl .Math.20,(1967) 493-519.
[16] Nitsche, J. , L1-convergence of .nite element approximations, Mathematical aspects of .nite element methods, Lect. Notes Math, 606 (1977), 261-274.