Journal of Nature, Life and Applied Sciences
Volume (5), Issue (2) : 30 Jun 2021
P: 48 - 55

AJSRP
ISSN: 2522-3356

مجلة العلوم الطبيعية والحياتية والتطبيقية
المجلد (5)، العدد (2) : 30 يونيو 2021م
ص: 48 - 55

A Study About One Generation of Finite Simple Groups and Finite Groups

Nader Mahmoud Taffach

Faculty of Science || Idlib University || Syria

Abstract: The group theory and its classifications are of great importance in many engineering, physical and chemical fields, especially those related to the concept of symmetry. In this paper, we study the problem of how a finite group can be generated by some subgroups. In order to the finite simple groups, we show that any finite non-abelian simple group can be generated by two Sylow p_1- and p_2-subgroups, where p_1 and p_2 are two different primes. We also, show that for a given different prime numbers p and q, any finite group can be generated by a Sylow p-subgroup and an intravariant q-subgroup. The paper consists of an introduction and two fundamental sections. In one section we study the problem of generating simple finite groups. In another section, we mention the fundamental results of the paper, that connected with generating the finite group from some subgroups.

Keywords: finite group, Sylow p-subgroup, intravariant p-subgroup generation of group.

دراسة حول أحد توليدات الزمر البسيطة المنتهية والزمر المنتهية

نادر محمود طفاش

كلية العلوم || جامعة إدلب || سوريا

المستخلص: إن لنظرية الزمر وتصنيفاتها أهمية كبيرة في العديد من المجالات الهندسية والفيزيائية والكيميائية، وبشكل خاص بما هو مرتبط بمفهوم التناظر. في هذه المقالة ندرس مسألة توليد زمرة منتهية من بعض الزمر الجزئية منها. فمن أجل الزمر البسيطة المنتهية، بيَّنا أن أي زمرة غير آبلية بسيطة منتهية يمكن توليدها من p_1- زمرة جزئية سيلوفية و p_2-زمرة جزئية سيلوفية، حيث p_1 و p_2 عددين أوليين مختلفين. كما بيَّنا أيضاً أنه من أجل أي عددين أوليين مختلفين p و q، كل زمرة منتهية يمكن توليدها من p-زمرة جزئية سيلوفية و q-زمرة جزئية متداخلة. تتألف المقالة من مقدمة وقسمين أساسيين. ففي أحد الأقسام تمت دراسة توليد الزمر البسيطة المنتهية. وفي القسم الآخر تم ذكر النتائج الأساسية التي تم الحصول عليها والمتعلقة بتوليد الزمر المنتهية من بعض الزمر الجزئية.

الكلمات المفتاحية: زمرة منتهية، p-زمرة جزئية سيلوفية، p-زمرة جزئية متداخلة، توليد زمرة.

مقدمة.

غالبًا ما تنشأ الزمر المنتهية عند التفكير في تناظر الأشياء الرياضية أو الفيزيائية (المادية)، وذلك عندما يتم إجراء عدد محدود من التحويلات على هذه الأشياء والتي تحافظ على بنيتها. تشمل الأمثلة المهمة للزمر المنتهية الزمر الدوَّارة (cyclic groups) وزمر التبديلات (permutation groups). وعمل علماء الرياضيات، خلال القرن العشرين، في بعض الجوانب النظرية للزمر المنتهية بشكل مركز حيث تم إيلاء هذه الدراسة اهتمام كبير. فكان التصنيف أحد المجالات الرئيسية لهذه الدراسة. ففي بداية الثمانينيات، بلغ تطور نظرية الزمر المحدودة ذروته في تصنيف الزمر البسيطة المنتهية، وكان هذا التطور مثير للإعجاب ومقنع بقوة الأساليب التي تم اتباعها والنتائج التي تم تحقيقها والوصول إليها [1]. حيث تم في عام 2004

الانتهاء من تصنيف الزمر البسيطة المنتهية (تلك التي لا تحتوي على زمر جزئية نظامية غير مبتذلة). ونتيجة لذلك، تم تحقيق التصنيف الكامل للزمر البسيطة المنتهية، مما يعني أن كل تلك الزمر البسيطة التي يمكن من خلالها بناء جميع الزمر المنتهية أصبحت معروفة [2].

حظي مفهوم توليد الزمر البسيطة المنتهية والزمر المنتهية باهتمام واسع من قِبَل العلماء، حيث أن لتوليد الزمر المنتهية من خلال زمر جزئية مناسبة العديد من تطبيقات الزمر وتمثيلاتها. فعلى سبيل المثال، في [3] تم إيجاد علاقة بين توليد الزمر بواسطة عناصر مترافقة ووجود عناصر يمكن تمثيلها بواسطة مصفوفات دوارة. من المعروف أن الزمر البسيطة المنتهية غير الآبلية يمكن توليدها بزمرتين جزئيتين [4]. ففي [5] تم إثبات أن أي زمرة بسيطة متقطعة (sporadic group) يمكن توليدها عن طريق الالتفاف (involution) وعنصر آخر مناسب. وفي [6] تم إثبات أن كل زمرة بسيطة غير آبلية تتولد عن طريق الالتفاف وعنصر من رتبة أولية.

في عام 2007، وصف سلاتري (Slattery) في [7] طرقاً حسابية لتعداد وبناء وتحديد زمر منتهية من مرتبة غير تربيعية (square-free order). وأخيراً، تم في [8] تعميم نتيجة سلاتري إلى صف الزمر المنتهية التي تملك زمراً جزئية سيلوفية وقاموا بتزويد دراستهم بتطبيق حاسوبي لنظام الجبر الحاسوبي (GAP).

في هذه المقالة، بيَّنا أن أي زمرة منتهية بسيطة غير آبلية يمكن توليدها من p_1- زمرة جزئية سيلوفية وp_2-زمرة جزئية سيلوفية، حيث p_1 و p_2 عددين أوليين مختلفين. كما بيَّنا أيضاً أنه من أجل أي عددين أوليين مختلفين p و q، كل زمرة منتهية يمكن توليدها من p-زمرة جزئية سيلوفية و q-زمرة جزئية متداخلة.

الهدف من المقالة:

تهدف المقالة إلى توضيح كيفية توليد الزمر البسيطة المنتهية، وتوليد الزمر المنتهية من بعض الزمر الجزئية مثل p-زمرة جزئية سيلوفية و p-زمرة جزئية متداخلة.

أهمية المقالة:

إن لنظرية الزمر وتصنيفاتها أهمية كبيرة في العديد من المجالات الهندسية والفيزيائية والكيميائية، وبشكل خاص بما هو مرتبط بمفهوم التناظر. لذلك تكمن أهمية المقالة في النتائج التي تم الحصول عليها والتي تخص موضوع التصنيف الهام للزمر المنتهية من وجهة نظر مفهوم التوليد لهذه الزمر. مما يعطي أهمية للمقالة للباحثين في نظرية الزمر وتصنيفاتها.

مصطلحات المقالة:

فيما يأتي سنعرض تعاريف أهم المصطلحات التي وردت في المقالة، والتي لابد منها فيما سيأتي من فقرات قادمة.

- الزمرة المنتهية (finite group): هي كل زمرة عدد عناصرها منته.
- الزمرة النظامية (normal group): لتكن $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$. نقول إن H زمرة جزئية نظامية من الزمرة G إذا، وفقط إذا، كان:

$$g * H = H * g \quad \forall g \in G.$$

- الزمرة البسيطة (simple group): نقول عن زمر ما G إنها بسيطة إذا، وفقط إذا، لم تملك الزمرة G أية زمرة جزئية نظامية فعلية وغير مبتذلة.
- الزمرة المتقطعة (sporadic group): هي زمرة بسيطة منتهية من ست وعشرين زمرة تم الحصول عليها لدى البحث في مسألة التصنيف للزمر البسيطة المنتهية.
- العناصر المترافقة في الزمرة:

1- لتكن $(G,*)$ زمرة ما، وليكن $x,y \in G$. نقول عن y إنه مترافق مع x إذا كان بالإمكان إيجاد g من G بحيث يكون: $y = g^{-1} * x * g$.

2- لتكن $(G,*)$ زمرة ما، وليكن $a \in G$. نسمي المجموعة:

$$\{x \in G: \exists g \in G; x = g^{-1} * a * g\}$$

صف العناصر المترافقة مع العنصر a في الزمرة $(G,*)$.

- الزمرة المتداخلة (intravariant group): لتكن H زمرة جزئية من الزمرة G، ولتكن A زمرة تعمل من اليمين على G. نقول إن H هي A-متداخلة في G إذا كان من أجل أي $x \in A$ فإنه يوجد $g \in G$ بحيث: $H^x = H^g$.

نقول عن H إنها زمرة جزئية متداخلة من G إذا كانت H عبارة عن $Aut(G)$- متداخلة في G [14].

بتعبير آخر نقول إن H زمرة جزئية متداخلة من G إذا كان من أجل أي أوتومورفيزم φ لـ G، فإن $\varphi(H)$ و H مترافقان في G.

- الزمرة المشتقة (derived group): لتكن $(G,*)$ زمرة ما.

1- إذا كان x و y عنصرين ما من G، فإننا نسمي العنصر $x^{-1} * y^{-1} * x * y$ مُبادِل العنصرين x و y. ونرمز له بالرمز $[x,y]$.

2- نسمي الزمرة الجزئية من الزمرة G المولدة بالمجموعة: $\{[x,y]; x,y \in G\}$ مُبادل الزمرة $(G,*)$ (الزمرة المشتقة). ونرمز لها بالرمز $(G',*)$.

- الزمرة الجزئية السيلوفية (Sylow supgroup): لتكن G زمرة منتهية. نقول عن K إنها p-زمرة سيلوفية جزئية من G إذا كانت p-زمرة جزئية أعظمية من G، أي هي p-زمرة جزئية وغير محتواة تماماً في أي p-زمرة جزئية أخرى.

توليد الزمر البسيطة المنتهية:

للوصول للنتائج الأساسية في هذا القسم، نقدم ثلاث تمهيديات هامة مساعدة مع إثبات لكل منها.

تمهيدية 1:

ليكن $S = Alt_n$ حيث $n \geq 5$. إذا كان $t \leq n$ عدد أولي، عندئذ يمكن توليد S بواسطة 2-زمرة جزئية سيلوفية و t-زمرة جزئية سيلوفية.

الإثبات:

عندما يكون $n \leq 8$ فإن النتيجة واضحة. لنفرض أن $n > 8$ عدد فردي، ولتكن 2-زمرة جزئية سيلوفية R من S. إن لمدارات الزمرة R قياسات مختلفة وعددها أقل من $\log_2 n$ مداراً. لنأخذ x عبارة عن t-

عنصر، بحيث يكون لـ x دورة (cycle) طولها $t^a \geq \sqrt{n}$ عندما يكون t فردياً وعندما يكون $t = 2$ فإن طولها يساوي $n/2$ على الأقل. في كلا الحالتين، يكون قياس المدار أكبر من عدد مدارات الزمرة R. ومنه يمكننا أن نختار مرافقاً لـ x، بحيث يتقاطع مدار x مع أي مدار لـ R. إن $J := \langle R, x \rangle$ متعدية. في الحقيقة بما أن n عدد فردي و $R \leq J$، فإن J ابتدائية (primitive). وبما أن $n > 8$ فإن الزمرة الابتدائية الوحيدة لـ Alt_n والتي تحوي عنصراً محركاً لأربع نقاط هي Alt_n [9]، ومنه نجد النتيجة المطلوبة. لنفرض الآن أن $n > 9$ عدد زوجي. من الحالة السابقة (التي كان فيها n عدد فردي) نجد أن $Alt_{n-1} = \langle R_0, T \rangle$، من أجل T عبارة عن t-زمرة جزئية و R_0 عبارة عن 2-زمرة جزئية سيلوفية. ومنه $\langle R, T \rangle$ تحوي فعلياً $\langle R_0, T \rangle = Alt_{n-1}$، وبالتالي $\langle R, T \rangle = S$. وبذلك نصل إلى إثبات التمهيدية 1.

تمهيدية 2:

لتكن S زمرة بسيطة متقطعة ولتكن P عبارة عن 2-زمرة جزئية سيلوفية من S. إذا كان $1 \neq x \in S$، فإن

$S = \langle P, x^g \rangle$، لأجل $g \in S$.

الإثبات:

لنفرض أن S زمرة بسيطة متقطعة، ولتكن P عبارة عن 2-زمرة جزئية سيلوفية من S ، و x عنصر من S مختلف عن العنصر الحيادي (nonidentity). يمكننا استخدام النتيجة المعروفة حول الزمر الأعظمية الجزئية من S لإثبات أن x^S ليست مجموعة جزئية من الاتحاد لتلك الزمر الجزئية الأعظمية في S والتي تحوي P. لتكن M زمرة جزئية أعظمية من S بحيث $P \leq M$. عدد الـ S-مرافقات لـ M والتي تحوي P يساوي

$$|N_S(P)|/|N_M(P)| \leq [N_S(P): P]$$

ومنه فإن هذه الزمر الجزئية يمكن أن تحوي على الأكثر $[N_S(P): P]|x^S \cap M|$ عنصراً من الصف x^S. وبالتالي فإن عدد العناصر في x^S والتي تولد زمرة جزئية فعلية من S مع P محدود من الأعلى بالعدد

$$[N_S(P): P]\Sigma_M |x^S \cap M|$$

حيث أن المجموع هنا مأخوذ من أجل جميع التمثيلات M للصف المرافق للزمر الجزئية الأعظمية ذات الدليل الفردي في S. ليكن 1_M^S يدل على مميز التبديل لـ S على المجموعات المرافقة لـ M.

لدينا $|x^S \cap M| = |x^S| 1_M^S(x)/1_M^S(1)$. ومنه فإن الإثبات سيتم إذا بيَّنا أن المتباينة الآتية

$$[N_S(P): P]\Sigma_M \, 1_M^S(x)/1_M^S(1) < 1 \qquad (1)$$

صحيحة.

إن الأعداد $[N_S(P): P]$ يمكن قراءتها من [10]. من المعلوم أن زمرة مونستر (Monster) تحوي بدقة خمسة صفوف من الزمر البسيطة الأعظمية ذات دليل فردي، والتي لها البنية [11]:

$$2^{1+24}.Co_1, \;\; 2^{10+16}.O_{10}^{+}(2), \;\; 2^{2+11+22}.(M_{24} \times S_3),$$
$$2^{5+10+20}.(S_3 \times L_5(2)), \;\; (L_3(2) \times 3S_6)$$

كما أن مميزات التبديل المقابلة لها معلومة أيضاً، انظر [11]. بما أن الحد الأعلى في المتراجحة (1) أصغر من العدد 1 لأجل كل x من S ، فإننا نكون قد توصلنا لإثبات التمهيدية 2.

تمهيدية 3:

لتكن S زمرة جزئية بسيطة مرتبطة بزمرة تغطية (covering group) من نمط لي (Lie type) بمميز p. ولتكن P عبارة عن p-زمرة جزئية سيلوفية من G. إذا لم يكن $x \in S$ عنصراً مركزياً لـ S، عندئذ فإن $S = \langle P, x^g \rangle$ من أجل $g \in S$.

الإثبات:

حسب تمهيدية تيتس (Tits's lemma) [12]، نجد أن أي زمرة جزئية أعظمية تحوي P هي زمرة جزئية مكافئة (parabolic subgroup) ويوجد زمرة جزئية مكافئة واحدة تحوي P في كل صف مرافق للزمر الجزئية المكافئة الأعظمية. إذا كان لـ S رتبة تساوي 1، فإن زمرة بوريل الجزئية هي الزمرة الجزئية الأعظمية الوحيدة التي تحوي T ومنه من الواضح أنه لا يوجد صف مرافق غير مركزي يحوي زمرة بوريل، ومنه نجد المطلوب. لذلك يمكننا أن نفرض أن الرتبة تساوي 2 على الأقل. لنفرض أولاً أن S هي زمرة كلاسيكية. إذا كان $S = SL_2(q)$، عندئذ نختار $v_1, \dots, v_n$ أساس للمودول (module) الطبيعي، ونفرض أن T يثبت متتالية متناقصة من الزمر الجزئية (flag) المتشاركة مع هذا الأساس المرتب. بما أن S تعمل بشكل 2-متعدي على فضاءات أحادية البعد، فإنه لأجل أي عنصر $x \in S$ غير مركزي، يمكننا اختيار $g \in S$ بحيث لا ينتمي $g^{-1}xgv_1$ إلى مولد $v_1, \dots, v_{n-1}$، ومنه x^g لا ينتمي لأي زمرة جزئية مكافئة تحوي T. لنفرض الآن أن لـ S رتبة تساوي على الأقل 2 وأن $\dim V \geq 4$. ولنفرض أولاً أن S ليست زمرة spin ذات بعد زوجي أقل من 8. ولنفرض أن T عبارة عن p-زمرة جزئية سيلوفية مثبتة. عندئذ فإن الزمر الجزئية الأعظمية تقابل تماماً فضاءات شاذة من أبعاد مختلفة. ليكن v_1 عنصراً مغايراً للصفر من فضاء مثبت من T بعده يساوي 1. إذا كانت n هي رتبة S، عندئذ يوجد $v_1, \dots, v_n$ مجموعة مستقلة خطياً ومرتبة بحيث تكون أي زمرة جزئية مكافئة أعظمية تحوي T عبارة عن مثبت للفضاء الشاذ كلياً $V_i = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$. ليكن x عنصر غير مركزي من S، ولنفرض أن $xv_1 = w$. إذا كان w و v_1 مرتبطان خطياً، فإنه يكفي اختيار $g \in S$ بحيث يطبق x^g العنصر v_1 بعنصر لا ينتمي إلى V_n. إذا كان w عنصراً لا ينتمي إلى V_n، عندئذ فإن x لا ينتمي إلى أي من الزمر الجزئية المكافئة التي تحوي T. الحالة الأخيرة المتبقية هي إذا كان $\langle v_1, w \rangle$ فضاء شاذ بشكل كلي وجزئي من V_n. عندئذ فإنه يوجد $g \in S$ يثبت v_1 ويطبق w بأي متجه شاذ في $v_1^{\perp}$، وبما أن $v_1^{\perp}$ لا ينتمي إلى V_n، لأن $\dim V \geq 4$، فإن النتيجة المطلوبة محققة في هذه الحالة. لنفرض الآن أن S هي زمرة spin ذات بعد زوجي ورتبتها n. سنعمل ضمن مودول متعامد (orthogonal module) من البعد $2n$، في هذه الحالة نختار مجموعة مستقلة خطياً من متجهات الأساس $v_1, \dots, v_{n+1}$، بحيث تكون الزمر الجزئية المكافئة الأعظمية التي تحوي T عبارة عن مثبت لفضاء جزئي شاذ كلياً $V_i = \langle v_1, \dots, v_i \rangle, i = 1, \dots, n - 2$ من البعد i و للفضائين الجزئيين الشاذين كلياً $\langle v_1, \dots, v_{n-1}, v_n \rangle$ و $\langle v_1, \dots, v_{n-1}, v_{n+1} \rangle$. أخيراً لنفرض أن S زمرة استثنائية (exceptional group) من الرتبة n. وليكن $P_1, \dots, P_n$ زمر جزئية مكافئة أعظمية مختلفة تحوي T، وليكن $C = x^S$ من أجل x عنصر غير مركزي من S. من [13] ينتج أن:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|C \cap P_i|}{|C|} < 1.$$

لذلك فإن $C \neq \bigcup_{i=1}^{n} (C \cap P_i)$. وبذلك يكون قد تم إثبات التمهيدية 3.

لنعتبر الآن الحالة الخاصة التي تكون فيها S زمرة بسيط الترابط (simply connected) لكن الزمرة $S/Z(S)$ ليست بسيطة. إذا كانت S قابلة للحل (solvable)، فإنه يمكن تجاهل هذه الحالة. وبذلك يمكن ترك الزمر الأربع الآتية $Sp_4(2), G_2(2), \ {}^3G_2(3), \ {}^2F_4(2)$. من أجل الزمر $Sp_4(2), G_2(2), \ {}^3G_2(3)$ تكون الزمر الجزئية المولدة من زمر جزئية ناظمية أصغرية منها هي $Alt_6, PSU_3(3), PSL_2(8)$ على الترتيب، وبذلك يكون قد تم إثبات النتيجة المطلوبة من أجل هذه الزمر. ومن أجل ${}^2F_4(2)$ ، فإن الزمر الجزئية المولدة من زمر جزئية ناظمية أصغرية منها يمكن اشتقاقها من زمرة جزئية دليلها يساوي 2 بشكل مماثل تماماً لما تم إجراؤه أعلاه، أي أنه يوجد فقط زمرتين جزئيتين أعظميتين تحويان 2-زمرة جزئية سيلوفية وكل منهما زمرة جزئية مكافئة متقاطعة مع الزمر المُشتقة.

وفقاً لما سبق نكون قد توصلنا لإثبات المبرهنة الهامة الآتية الخاصة بالزمر البسيطة المنتهية.

مبرهنة 1:

لتكن S زمرة منتهية بسيطة غير آبلية. عندئذ يوجد عدد أولي p_1 يقسم $|S|$، بحيث يمكن لـ S أن تتولد من p_1-زمرة جزئية سيلوفية و p_2-زمرة جزئية، حيث p_2 أي عدد أولي يقسم $|S|$.

توليد الزمر المنتهية

لنذكر الآن المبرهنة الأساسية الآتية التي تخص توليد الزمر المنتهية.

مبرهنة 2:

ليكن p و q عددين أوليين مختلفين ولتكن G زمرة منتهية. عندئذ يوجد p-زمرة سيلوفية جزئية P من G و q-زمرة جزئية متداخلة R بحيث يكون $G = \langle P, R \rangle$.

الإثبات:

ليكن p و q عددين أوليين مختلفين، ولتكن G مثالاً معاكساً من مرتبة أصغرية. لنبرهن أولاً أن:

$$O_p(G) = 1.$$

إذا لم يكن ذلك صحيحاً، ليكن $A \neq 1$ زمرة جزئية مميزة أصغرية من G و p-زمرة آبلية ابتدائية. من كون الزمرة أصغرية فإنه يكون $G/A = \langle P/A\,, R/A \rangle$، حيث P هي p-زمرة جزئية سيلوفية من G و R هي زمرة جزئية من G تحوي A و R/A هي q-زمرة متداخلة من G/A. بما أن $\gcd(|R|/|A|\,, |A|) = 1$، فإنه $H^2(R/A\,, A) = 0$ ، ومنه $R = AR_1$ حيث R_1 هي مكملة A في R. وبشكل خاص، R_1 هي q-زمرة جزئية. لنفرض أن a هو أوتومورفيزم لـ G. عندئذ وفقاً لترافق عنصر من G، فإنه من الممكن أن نفرض أن $a(R) = R$. ومنه $a(R_1)$ هو مكملة لـ A في R. بما أن $H^1(R_1, A) = 0$، فإن جميع مكملات A في R تكون مترافقة بواسطة عنصر من A ومنه $a(R_1)$ مترافق مع R_1، حيث R_1 هي زمرة متداخلة. من الواضح أن $G = \langle P, R_1 \rangle$.

ثانياً، لنبرهن أن $O_q(G) = 1$. إذا لم يكن ذلك صحيحاً، لنفرض أن A زمرة جزئية مميزة أصغرية من G و A هي q-زمرة جزئية. من كون الزمرة أصغرية يكون $G/A = \langle Q/A\,, R/A \rangle$ حيث Q/A هي p-زمرة

جزئية سيلوفية من G/A و R/A هي q-زمرة جزئية متداخلة من G/A. بما أن A زمرة مميزة، فإن R هي زمرة متداخلة ومن الواضح أنها q-زمرة جزئية.

من الواضح أن $Q = AP$ حيث P هي p-زمرة جزئية سيلوفية من Q (ومنه من G). ومنه $G = \langle P, R \rangle$ وبذلك نكون قد وصلنا للنتيجة المطلوبة.

لنفرض الآن أن A هي زمرة جزئية مميزة أصغرية من G. مما سبق نجد أن $A = L \times \ldots \times L$ حيث L هي زمرة بسيطة غير آبلية ذات مرتبة قابلة للقسمة على p. حسب المبرهنة 1، يكون $A = \langle Q, M \rangle$، حيث Q هي p-زمرة جزئية سيلوفية من A و M هي r-زمرة جزئية سيلوفية من A من أجل $r \neq p$. ليكن $H = N_G(M)$. عندئذ H هي زمرة جزئية فعلية من G ومنه $H = \langle D, R \rangle$ حيث D هي p-زمرة جزئية سيلوفية من H و R هي q-زمرة جزئية متداخلة من H. بما أن R تنظّم M، نفرض أن $R \geq M$. نلاحظ أن الزمرة H هي المنظم لزمرة جزئية سيلوفية من الزمرة الجزئية المميزة لـ G ومنه H هي زمرة متداخلة وكذلك الأمر بالنسبة للزمرة R. يمكننا تكبير D ولنفرض أن D تحوي p-زمرة جزئية سيلوفية Q_1 من A. ومنه $Q_1^a = Q$ من أجل $a \in A$. وبالتالي $D^a \geq Q$. إن $G = J := \langle D^a, R \rangle$. نلاحظ أن $J \geq \langle Q, M \rangle = A$. وبما أن $a \in A$، فإن $DA = D^aA$، ومنه $J \geq \langle A, D, R \rangle \geq \langle A, H \rangle$. وحسب مبدأ فراتيني يكون $G = HA$ ومنه $J = G$. وبذلك يكون قد تم إثبات المبرهنة 2.

الخاتمة والتوصيات

تم في هذه المقالة دراسة مسألة توليد زمرة منتهية من بعض الزمر الجزئية منها. فمن أجل الزمر البسيطة المنتهية، بيَّنا أن أي زمرة غير آبلية بسيطة منتهية يمكن توليدها من p_1- زمرة جزئية سيلوفية و p_2-زمرة جزئية سيلوفية، حيث p_1 و p_2 عددين أوليين مختلفين. كما بيَّنا أيضاً أنه من أجل أي عددين أوليين مختلفين p و q، كل زمرة منتهية يمكن توليدها من p-زمرة جزئية سيلوفية و q-زمرة جزئية متداخلة. إن موضوع التوليد للزمر المنتهية له أهمية كبيرة في نظرية الزمر وبشكل خاص في موضوع التصنيف لهذه الزمر، لذلك يبقى موضوع البحث في إمكانية توليد الزمر المنتهية بدلالة زمر أخرى جزئية غير التي تمت دراستها في هذه المقالة مثل الزمر المتناظرة والمتناوبة وعديمة القوى ... إلخ، موضوعاً مفتوحاً للبحث والعمل عليه بشكل كبير في وقتنا الحاضر لدى الباحثين والمهتمين بالبحث العلمي في نظرية الزمر وتصنيفاتها.

المراجع

[1] Kurzweil, H. & Stellmacher, B. (2004). *The theory of finite groups: an introduction.* Springer-Verlag New York, Inc.

[2] Aschbacher, M. (2004). *The Status of the Classification of the Finite Simple Groups.* Notices of the American Mathematical Society. 51 (7). pp. 736–740.

[3] Martino, L. Di. & Pellegrini, M. & Zalesski, A. (2014). *On generators and representations of the sporadic simple groups*. Comm. Algebra 42, 880–908.

[4] Steinberg , R. (1962). *Generators for simple groups*. Canad. J. Math 14, 277-283.

[5] Aschbacher, M. & Guralnick, R. (1984). *Some applications of the first cohomology group*. J. Algebra 90, 446-460.

[6] King, C. S. (2017). *Generation of finite simple groups by an involution and an element of prime order*. J. Algebra 478, 153-173.

[7] Slattery, M. C. (2007). *Generation of groups of square-free order*. J. Symbolic Comput. 42, No. 6, 668–677

[8] Heiko, D. & Darren, L. (2021). *Generation of finite groups with cyclic Sylow subgroups.* J. Group Theory 24, 161–175.

[9] Wielandt, H. (1964). *Finite permutation groups*. Translated from the German by R. Bercov, Academic Press, New York-London.

[10] Wilson, R. A. (1998). *The McKay conjecture is true for the sporadic simple groups*. J. Algebra 207(1),294-305.

[11] Breuer, T. (2021). *Computations with the GAP Character Table Library*.http://www.math.rwth-aachen.de/homes/sam/ctbllib/doc2/chap8_mj.html

[12] Seitz, G. M. (1973). *Flag-transitive subgroups of Chevalley groups*, Ann. of Math. 97, 27-56.

[13] Lawther, R. & Liebeck, M. & Seitz, G. (2002). *Fixed point ratios in actions of finite exceptional groups of Lietype*. Pacific J. Math. 205, 393-464.

[14] Guralnick, R. & Haran, D. (2011). *Frobenius subgroups of free profinite products*. Bull. Lond. Math. Soc. 43, 467–477.