Journal of Nature, Life and Applied Sciences
Volume (4), Issue (4) : 30 Dec 2020
P: 91 - 110

AJSRP
ISSN: 2522-3356

مجلة العلوم الطبيعية والحياتية والتطبيقية
المجلد (4)، العدد (4) : 30 ديسمبر 2020م
ص: 91 - 110

Stress–temperature equations of motion of Ignaczak and Beltrami–Michell types in arbitrary curve coordinate system

Waad Samir Attiah

Mountajab Al-Hasan

Faculty of Science || ALBaath University || Homs || Syria

Abstract: This paper relates to the mathematical linear model of elastic, homogeneous and isotropic body, with neglected structure and infinitesimal elastic strains, subjected to temperature field; discussed by Hooke, and shortly called (H) . We firstly introduce the variable tensorial forms of the traditional and Lame descriptions of the coupled dynamic state of considerable Hooke body, in an arbitrary curve coordinate system. We study the variable tensorial forms in an arbitrary curve coordinate system, of the generalized Beltrami–Michell stress-temperature equations, and of the stress-temperature Ignaczak equations and its completeness problem for the (H) thermoelastic body.

Keywords: Hooke Thermoelastic Body, Linear Coupled Thermoelasticity, Beltrami – Michell, Ignaczak equations.

معادلات الحركة بلغة الإجهادات والحرارة من نوعي إغناتشاك وبيلترامي– ميشيل في أي نظام احداثي منحني

وعد سمير عطية

منتجب الحسن

كلية العلوم || جامعة البعث || حمص || سوريا

الملخص: يبيِّن البحث بالنموذج الرياضي لجسم مرن متماثل المناجي (Isotropic) ومتجانس (Homogeneous)، ومهمل البنية الجزيئية ويعاني من انفعالات مرنة لامتناهية في الصغر، والذي يُرمز له اختصاراً بـ (H)، وسيتم مناقشة الشكل التنسوري الناطق في نظام إحداثي منحني كيفي، لكلٍ من النموذج الرياضي التقليدي ونموذج لامي الرياضي لجسم هوك المرن (H)، المًعتبر، في حالته التحريكية، بوجود حرارة. سيتم مناقشة الشكل التنسوري الناطق في نظام إحداثي منحني كيفي على المتنوعة التقليدية ثلاثية الأبعاد، لكل من معادلات بيلترامي- ميشيل المعممة ومعادلات إغناتشاك بالإجهادات والحرارة، ومسألة الاتمام المتعلقة بها، وذلك لأجل الجسم الثرموديناميكي المرن (H) الخاضع للحرارة.

الكلمات المفتاحية: جسم هوك الثرموديناميكي، الشكل التنسوري، بيلترامي- ميشيل، إغناتشاك.

1- مقدمة:

ناقش العديد من الباحثين، غورتين (2010)، تروزديل (1984)، دروبوت (1971)، ليشيك (1970)،هينبوكل (1996)، النموذج الرياضي التقليدي لجسم هوك والنموذج الرياضي لجسم مرن في نظرية العزوم Couple Stress Theory)) بالشكل التنسوري الصامد. كما ناقش بعض الباحثين ليشيك (1970) وهينبوكل (1996)، الشكل التنسوري الناطق في نظام احداثي منحني كيفي، للوصف التقليدي للجسم الديناميكي المرن (H)، المتماثل المناجي

والمتجانس والإيزوتيرمي (أي متساوي درجات الحرارة) ([19] تمت مناقشة الشكل التنسوري الناطق في نظام إحداثي منحني كيفي في المتنوعة الإقليدية ثلاثية البعد، لكلٍ من الوصف التقليدي ووصف لامي للجسم الثرموموديناميكي المرن (H)، المتماثل المناحي والمتجانس، ذلك لأجل الحالة الترموديناميكية العامة للجسم). يتعلق البحث بالجسم ضمن المرونة الخطية الثرموديناميكية، والمتجانسة ومتماثلة المناحي، والمعينة بثابتين ماديين $0 < \lambda$, $0 < \mu$ ، وأول من أسس ذلك الباحث هوك، ولذلك سُمي فيما بعد باسمه، ورُمز له اختصاراً بالرمز(H).لأجل هذا الجسم، نفترض أن حالته الابتدائية B ، هي منطقة بسيطة الترابط في المتنوعة التقليدية ثلاثية البعد. كما أُفترض، أيضاً أن المقاطع التنسورية، الفيزيائية التي تصف جسم هوك المرن (H)، مركباتها دوال حقيقية ملساء بالقدر الكافي، تتبع لنقاط الحالة البدائية B وللزمن t أيضاً.

تمت مناقشة معادلات بيلترامي- ميشيل لأجل الحالة السكونية، والحالة السكونية الحرارية [3]،[5] لجسم هوك المرن ($\mathcal{H}$)، المتجانس والإيزوتروبي، ذلك في النظام الاحداثي الديكارتي. في [3 ,4]، وفي نفس النظام الإحداثي الديكارتي، عمم الباحث إغناتشاك، معادلات بيلترامي- ميشيل من الحالة السكونية إلى الحالة التحريكية لجسم هوك المرن، المتجانس، والإيزوتروبي، متبعاً في ذلك طريقاً آخراً يختلف عن الطريق الذي اتبعه الباحثان بيلترامي وميشيل. [14-15]، ناقش فوبنار أنواع خاصة من الشروط الحدية، التي تكمل مسألة معادلات بيلترامي- ميشيل، المعممة إلى الحالة الحركية لجسم هوك المرن المتجانس والإيزوتروبي في الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة، اللامتناهية في الصغر، أيضاً ضمن النظام الاحداثي الديكارتي. أما في [16-17] فناقش الباحث باتنايك وزملائه، مسألة الإتمام لمعادلات بيلترامي- ميشيل لأجل الحالة السكونية لجسم هوك، المتجانس والإيزوتروبي، وفي الحالة الفراغية للانفعالات المرنة، اللامتناهية في الصغر، وأيضاً ضمن النظام الإحداثي الديكارتي. وتم استنتاج معادلات بيلترامي- ميشيل المعممة إلى الحالة التحركية المرنة لجسم هوك المرن($\mathcal{H}$)، المتجانس والإيزوتروبي والإيزوتيرمي في نظام إحداثي منحني كيفي [18]. وتم استنتاج معادلات بيلترامي- ميشيل المعممة إلى الحالة الثرموديناميكية المرنة للجسم ($\mathcal{H}$) المتجانس والإيزوتروبي بالشكل التنسوري الصامد [21].

وفي النظام الاحداثي الديكارتي، تم استنتاج معادلات إغناتشاك لجسم هوك المرن ($\mathcal{H}$)، غير المتجانس، والمختلف خواص المرونة (Anisotropic) [4] كما قام الباحث باستنتاج معادلات إغناتشاك لأجل الحالة الحركة الحرارية المرنة للجسم المرن ($\mathcal{H}$)، المتجانس والمتماثل المناحي.

2- هدف البحث:

يهدف البحث إلى استنتاج الشكل التنسوري الناطق في نظام إحداثي منحني كيفي في المتنوعة التقليدية $'^3$ ، لكل من معادلات بيلترامي- ميشيل المعممة ولمعادلات إغناتشاك التنسورية، ومسألة الإتمام المتعلقة بها، كل ذلك لأجل الجسم الثرموديناميكي المرن ($\mathcal{H}$) المتجانس والمتماثل المناحي والذي يشغل في لحظة البدء المنطقة B بسيطة الترابط في المتنوعة التقليدية ثلاثية البعد $'^3$.

3- أهمية البحث:

- اختيار النظام الاحداثي المنحني المناسب الذي بسهل حل المسألة ويتوقف على الشكل البدئي للجسم؛ فالشكل البدئي B (الأسطواني) نختار النظام الاحداثي الاسطواني، أما الشكل البدئي B (الكروي) نختار النظام الاحداثي الكروي، أما الشكل البدئي B يمكن اختيار النظام المنحني الاحداثي الأنسب الذي يعمل على تسهيل حل المسألة.

- هناك مسائل يتم حلها بطريقة معادلات الإجهادات أسهل من حلها بالطريقة التقليدية، التي تنطلق من وصف لامي للجسم المعتبر [4].
- إن معادلات بيلترامي – ميشيل، المعممة، في الحالة العامة (المتوافقة مع شروط حدية مختلطة)،حلها لا يتوافق مع السلوك الديناميكي المرن، ولا مع السلوك الثرموديناميكي المرن للجسم المعتبر($\mathcal{H}$)، بينما معادلات إغناتشاك الموافقة، في الحالة العامة (المتوافقة مع شروط حدية مختلطة)، حلها يتوافق مع السلوك الديناميكي المرن، ومع السلوك الثرموديناميكي المرن للجسم المعتبر($\mathcal{H}$)، مع العلم بأن معادلات بيلترامي – ميشيل، من حيث البنية التفاضلية أقل تعقيداً من معادلات إغناتشاك.

وأهمية نتائج بحثنا تمثل الخطوة الأساسية الأولى لمسألة هامة، تتمثل في إيجاد تلك الشروط الحدية والابتدائية التي تكمل مسألة معادلات بيلترامي – ميشيل المعممة إلى الحالة الثرموديناميكية، وبذلك يتم حل المسائل عن طريق معادلات بيلترامي – ميشيل، المعممة والمتّممة بهذه الشروط الجديدة، حيث الحل سيصبح أبسط.

4- طرق لبحث:

سنعتمد تعميم الطريقة المستخدمة في[3،18]، في إيجاد الشكل التنسوري الناطق (في نظام احداثي منحني كيفي) لمعادلات بيلترامي– ميشيل الثرموديناميكية (العامة) للجسم الثرموديناميكي ($\mathcal{H}$) المتجانس والمتماثل المناحي. كما سنعتمد تعميم طريقة إغناتشاك [4] لاستنتاج معادلات إغناتشاك، وإثبات مسألة الإتمام المتعلقة بها للجسم المعتبر وبالشكل التنسوري الناطق في نظام احداثي منحني كيفي. سنعرض فيما يلي الشكلان التنسوريان الناطقان (في نظام احداثي منحني كيفي)، لكل من الوصف التقليدي ووصف لامي للحالة الثرموديناميكية للجسم المرن ($\mathcal{H}$) المتجانس والمتماثل المناحي والخاضع لدرجات حرارة ويشغل في لحظة البدء منطقة B بسيطة الترابط في المتنوعة التقليدية ثلاثية البعد ^{3} ، [7-19].

<u>فرضية1</u>: نفترض أن جميع الأدلة اللاتينية .... $i\,,\,j\,,k\,,$ تأخذ القيم $1\,,2\,,3$، وسنعتمد رموز أينشتاين في المتنوعة التقليدية ثلاثية الأبعاد ^{3} ، وأن $O\,x_1\,x_2\,x_3$ جملة إحداثية ديكارتية قائمة ومباشرة وعطالية، وقاعدتها هي $(\,\mathbf{e}_1\,,\,\mathbf{e}_2\,,\,\mathbf{e}_3\,)$، ولنفرض أيضاً وجود نظام إحداثي منحني كيفي في B، وسطاءه η_i. وقاعدته موافقة التغير هي $\mathbf{g}_i\,(p) = \mathbf{g}_i\,(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ ، وقاعدته مخالفة التغير هي $\mathbf{g}^i\,(p) = \mathbf{g}^i\,(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$.رمز النقطة يدل على المشتق الجزئي بالنسبة للزمن: $\dot{f} = \partial_t f \;= (\partial\,/\,\partial t\,)\,f \;\;,\;\; \ddot{f} = \partial_t^2 f \;= (\partial^2\,/\,\partial t^{\,2}\,)\,f$.

إن العملية الثرموديناميكية المرنة للجسم المرن ($\mathcal{H}$)، المتجانس والمتماثل المناحي والخاضع للحرارة، توصف من خلال مجموعة المقاطع التنسورية $\{\;\mathbf{u}\;,\;\mathbf{E}\;,\;\mathbf{S}\;,\;T\;\}$، حيث $\mathbf{u}$ مقطع متجهي يمثل فيزيائياً حقل الإزاحات، أما $\mathbf{E}$ و $\mathbf{S}$ فهما مقطعان تنسوريان من المرتبة الثانية متناظران، وفيزيائياً هما على الترتيب، مقطع الانفعالات ومقطع الاجهادات التنسوريان، أخيراً T هو مقطع تنسوري من المرتبة الصفرية، وهو يمثل فيزيائياً تغيير الحرارة المطلقة عن حرارة الحالة الطبيعية للجسم: T_0 (الحالة الطبيعية للجسم المرن (H)،الخاضع لحرارة، هي الحالة التي ينعدم فيها كلاً من الأنتروبية والمقطعين التنسوريين: $\mathbf{E}$ و $\mathbf{S}$). فإذا رمزنا بـ$A^{+} := \,]\,0\,,\infty\,[$ وبـ $A := [\,0\,,\infty\,[$، فيمكن أن تمثل الحقول السابقة في $B\;\times\;A^{+}$، وفي النظام الاحداثي المنحني η_i، على النحو الآتي:

$$\mathbf{u} = u^{i}\,\mathbf{g}_i = u_i\;\mathbf{g}^{i} \tag{4.1}$$

$$\mathbf{E} = E^{\,i\,j}\,\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = E_{i\,j}\;\mathbf{g}^{i} \otimes \mathbf{g}^{j} = E^{\,i}_{\,j}\;\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^{j} \tag{4.2}$$

$$\mathbf{S} = S^{ij}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = S_{ij}\,\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = S^i_j\,\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \qquad (4.3)$$

حيث u_i و u^i، على الترتيب تمثل المركبات موافقة التغيير والمركبات مخالفة التغيير في النظام الاحداثي المنحني η_i لمقطع الإزاحة $\mathbf{u}$ ، كما أن: E_{ij} و E^{ij} و E^i_j، هي مصفوفات متناظرة، تمثل على التراتيب المركبات موافقة التغيير والمركبات مخالفة التغيير والمركبات المختلطة في النظام الاحاثي المنحني η_i لمقطع الانفعال $\mathbf{E}$، أخيراً: S_{ij} و S^{ij} و S^i_j، هي أيضاً مصفوفات متناظرة، وتمثل على التراتيب المركبات موافقة التغيير والمركبات مخالفة التغيير والمركبات المختلطة في النظام الاحاثي المنحني η_i لمقطع الإجهاد $\mathbf{S}$.

4. أ) مسألة الوصف التنسوري التقليدي، الناطق(في النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i)، للحالة الترموديناميكية المرنة للجسم $(\mathcal{H})$، المتجانس، والمتماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط B في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد [3] ، [1، 7، 19]:

يتألف الوصف التنسوري التقليدي، الناطق في النظام الاحداثي المنحني η_i، للجسم الثرموديناميكي المرن، المدروس $(\mathcal{H})$، يتألف من المعادلات التنسورية، والعلاقات التنسورية الأساسية، والشروط الحدية والابتدائية، التنسورية التالية، الناطقة في النظام الاحداثي المنحني η_i [1، 7،19]:

معادلات الحركة، المحققة في $B \times A^+$:

$$\nabla_j S^{ji} + b^i - \rho\,\frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.4)$$

حيث ρ تمثل الكثافة الحجمية لجسم هوك المرن $(\mathcal{H})$ (وهي مقدار ثابت، كون الجسم متجانس)، و b^i تمثل المركبات مخالفة التغيير في النظام الاحداثي المنحني η_i، لمقطع القوة الحجمية، المتجهي $\mathbf{b}$. الرمز ∇_k يدل على المشتق موافق التغيير بالنسبة للوسيط η_k، في النظام ألإحداثي المنحني η_i ؛

$$\nabla_k S^{ji} = \partial_k S^{ji} + \Gamma^j_{km} S^{mi} + \Gamma^i_{km} S^{jm} \qquad (4.5)$$

حيث ∂_k يمثل المشتق الجزئي بالنسبة للوسيط η_k؛ $\partial_k S^{ji} = \dfrac{\partial S^{ji}}{\partial \eta_k}$. الرموز Γ^k_{ij} تدل على رموز كريستوفيل من النوع الثاني؛ وهي تعطى بالعلاقة: $\Gamma^k_{ij} = g^{kl}\,\Gamma_{ijl}$، علماً أن Γ_{ijl} تمثل رموز كريستوفيل من النوع الأول، وتعطى بدورها بالعلاقة $\Gamma_{ijk} = \partial_j \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_k = \frac{1}{2}(\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij})$، إضافة إلى ما تقدم ذكره فإن: $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ و $g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j$ هما، على الترتيب الحد العام للمصفوفة المترية موافقة التغير والحد العام للمصفوفة المترية مخالفة التغير.

معادلة الحرارة والانفعال، المحققة في $B \times A^+$:

$$(k\,\Delta - c\,\partial_t)T + mT_0\dot{E}^k_k = -r \qquad (4.6)$$

حيث: k معامل التوصيل الحراري، و m المعامل الإجهادي - الحراري، c الحرارة النوعية للجسم المدروس، وجميعها مقادير حقيقية ثابتة. كما أن: r هو مقطع تنسوري من المرتبة الصفرية، ويمثل فيزيائياً المصادر الحرارية في الجسم المدروس. هنا أيضاً: $\Delta T = \nabla_i (\nabla^i T)$ ، حيث $\nabla^i := g^{ij}\nabla_j$.

معادلات توافق الانفعالات، المحققة في $B \times A$:

$$\nabla_{k1} E_{ij} + \nabla_{ij} E_{k1} - \nabla_{ik} E_{j1} - \nabla_{j1} E_{ik} = 0 \qquad (4.7)$$

حيث: $\nabla_{ij} := \nabla_i \nabla_j$.

إن المعادلات (4.7) تكافئ المعادلات التالية، المحققة في $B \times A$ (في [8] تم اثبات أن المعادلة التنسورية الناطقة (4.7) هي فقط ثلاث علاقات مستقلة، وهي نفسها العلاقات الثلاث المستقلة الناتجة عن المعادلة التنسورية الناطقة (4.8). تنتج (4.8) عن (4.7) بضرب طرفي (4.7) بـ g^{k1}، والأخذ بعين الاعتبار أن: $g^{k1}\nabla_1 = \nabla^k$ و $g^{k1}E_{k1} = E^k_k$ وأن: $\nabla_i g^{k1} = 0$. وهنا: $\Delta := \nabla^k \nabla_k$):

$$\Delta E_{ij} + \nabla_{ij} E^k_k - \nabla^k (\nabla_i E_{jk} + \nabla_j E_{ik}) = 0 \qquad (4.8)$$

العلاقات الهندسية، المحققة في $B \times A^+$:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \qquad (4.9)$$

حيث u_i المركبات موافقة التغيير للمقطع المتجهي **u**، في النظام الإحداثي المنحني η_i، كما أن: $\nabla_i u_j = \partial_i u_j - \Gamma^m_{ji} u_m$.

العلاقات التأسيسية، المحققة في $B \times A$:

$$\begin{aligned} S^{ji} &= [\lambda g^{ij} g^{k1} + \mu (g^{i1} g^{jk} + g^{j1} g^{ik})] E_{k1} + m g^{ij} T \\ &= 2\mu E^{ji} + \lambda g^{ij} E^k_k + m g^{ij} T \end{aligned} \qquad (4.10)$$

الشروط الحدية، المحققة على $\partial B \times A$: (حيث ∂B هي الحدود الملساء لـ B):

$$P^i(\eta;t) = S^{ji}(\eta;t) n_j(\eta) \,,\; Q(\eta;t) = -k\, n^i(\eta)\, \partial_i T(\eta;t) \qquad (4.11)$$

حيث: $\eta \equiv (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ و n^i تمثل المركبات مخالفة التغيير للمقطع المتجهي الواحدي **n**، في النظام الاحداثي المنحني η_i، وعلماً أن المركبات مخالفة التغيير $P^i(\eta;t)$ وكذلك الدالة $Q(\eta;t)$ مفروضة (معلومة) على $\partial B \times A$.

الشروط الابتدائية، المحققة في $B \times \{0\}$:

$$u^i = u^{0i} \quad , \quad \dot{u}^i = \dot{u}^{0i} \quad , \quad T = T^0 \qquad (4.12)$$

حيث المركبات مخالفة التغيير: $u^{0i}(\eta)$ و $\dot{u}^{0i}(\eta)$ وكذلك الدالة $T^0(\eta)$ جميعها معلومة في B.

إن هدف الوصف التقليدي، التنسوري الناطق (في النظام الاحداثي المنحني η_i)، للجسم الثرموديناميكي المرن $(\mathcal{H})$، المتجانس والمتماثل المناحي، هو إيجاد السلوك الثرموديناميكي المرن$\{u^i, E^{ji}, S^{ji}, T\}$ في $\bar{B} \times A$ المحقق لـ (4.7)−(4.4) و(4.12)−(4.9).

قبل البدء بمناقشة النتائج تلزمنا التعاريف التالية.

تعريف1 : نقول أن مقطعي الإجهادات والحرارة، التنسوريين الناطقين: S^{ji} و T يوافقان حل مسألة الشكل التنسوري التقليدي، الناطق: (4.7)−(4.4) و(4.12)−(4.9) للجسم الثرموديناميكي المرن$(\mathcal{H})$، إذا وفقط إذا وجد مقطعين تنسوريين ناطقين: u^i و E^{ji}، بحيث يصبح$\{u^i, E^{ji}, S^{ji}, T\}$، ممثلاً للسلوك الثرموديناميكي المرن لـ$(\mathcal{H})$، متوافقاً مع معطيات المسألة: (4.7)−(4.4) و(4.12)−(4.9).

تعريف 2 : نقول أن مجموعة المقاطع التنسورية الناطقة$\{u^i, S^{ji}, b^i\}$، تشكل جزءاً من السلوك الثرموديناميكي المرن للجسم $(\mathcal{H})$، في $\bar{B} \times A$، متوافقاً مع شروط البدء$(4.12)_{1,2}$ $(\boldsymbol{\eta} \in \bar{B})$، إذا وفقط إذا تحققت المعادلة التنسورية الناطقة (4.4) في $\bar{B} \times A^+$ والشروط $(4.12)_{1,2}$ في $\boldsymbol{\eta} \in \bar{B}$.

ومن أجل متطلبات الفقرة القادمة، أيضا يلزمنا كلاً من التعريف والمبرهنة المساعدة، التاليين (تم اثبات ذلك بالشكل التنسوري الصامد، لأجل الحالة الخاصة، المتمثلة بحالة الإجهادات الحرارية):

تعريف 3 : يسمى المقطع المتجهي، الناطق f^i، المعطى على $\bar{B} \times A$ بـ :

$$f^i = \mathrm{j} * b^i + \rho(u^{0i} + t\dot{u}^{0i}) \tag{4.13}$$

أو بـ :

$$f^i(\boldsymbol{\eta}, t) = \mathrm{j} * b^i(\boldsymbol{\eta}, t) + \rho\left[u^{0i}(\boldsymbol{\eta}) + t\dot{u}^{0i}(\boldsymbol{\eta})\right] : (\boldsymbol{\eta}, t) \in \bar{B} \times A \tag{4.14}$$

حيث: $\mathrm{j} = \mathrm{j}(t) : t \geq 0$، أما الرمز $*$ فيدل على الطي [13]**:**

$$\mathrm{j} * b^i(\boldsymbol{\eta}, t) := \int_0^t \mathrm{j}(t-\tau)\, b^i(\boldsymbol{\eta}, \tau)\, d\tau = \int_0^t (t-\tau)\, b^i(\boldsymbol{\eta}, \tau)\, d\tau$$

يسمى بمقطع شبه القوة الحجمية، التنسوري الناطق في النظام المنحني الكيفي η_i.

4. ب) الشكل التنسوري الناطق (في النظام الاحداثي المنحني η_i) لمعادلات لامي، الحاكمة للسلوك الثرموديناميكي المرن للجسم $(\mathcal{H})$، المتجانس، والمتماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط B في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد[3] ، :

نحصل على هذه المعادلات بإتباع مايلي. برفع الدليل j في العلاقة التنسورية، الهندسية (4.9) [8, 11, 12]، وذلك بتبديل كل j بـ k في (4.9)، من ثم ضرب طرفي الناتج بـ g^{jk}، فنحصل على العلاقة التنسورية التالية، المحققة في$B \times A^+$:

$$E^i_j = \frac{1}{2}(\nabla^i u_j + \nabla_j u^i) \tag{4.15}$$

مع العلم أن: $\nabla^i := g^{ik}\nabla_k$ و $u^i := g^{ik}u_k$ و $\nabla_j u^i = \partial_j u^i + \Gamma^i_{jm} u^m$.

وهنا استخدمنا خواص المشتق موافق التغيير، والعلاقة: $\nabla_j g^{ik} = 0$.

وبأخذ تقلص طرفي (4.15)، وذلك بضرب طرفيها بـ δ_i^j، نحصل على العلاقة التالية:

$$E_k^k = \frac{1}{2}(\nabla^k u_k + \nabla_k u^k) \tag{4.16}$$

وبما أن:

$$\nabla^k u_k = \nabla_k u^k \tag{4.17}$$

فتصبح العلاقة (4.16)، على الشكل التالي في $B \times A^+$:

$$E_k^k = \nabla_k u^k \tag{4.18}$$

هذا من جهة أولى، ومن جهة ثانية، برفع الدليلين i و j في العلاقة التنسورية الناطقة، الهندسية (4.9)، متبعين في ذلك الطريقة ذاتها التي اتبعناها من قبل، فنحصل على العلاقة المكافئة التالية، المحققة في $B \times A^+$:

$$E^{ij} = \frac{1}{2}(\nabla^i u^j + \nabla^j u^i) \tag{4.19}$$

الآن، بتعويض (4.18) و(4.19) في (4.10)، نحصل على العلاقة التنسورية التالية، المحققة في $B \times A^+$:

$$S^{ji} = \mu(\nabla^j u^i + \nabla^i u^j) + \lambda\, g^{ij}\, \nabla_k u^k + m\, g^{ij}\, T \tag{4.20}$$

وبتطبيق المشتق موافق التغيير ∇_j، على طرفي العلاقة (4.20)، واستخدام خواص المشتق موافق التغيير، نحصل على العلاقة التالية، المحققة في $B \times A^+$:

$$\begin{aligned} \nabla_j S^{ji} &= \mu(\nabla_j \nabla^j u^i + \nabla^i \nabla_j u^j) + \lambda\, \nabla^i \nabla_k u^k + m\, \nabla^i T \\ &= \mu\, \nabla_j \nabla^j u^i + (\lambda + \mu)\, \nabla^i \nabla_j u^j + m\, \nabla^i T \end{aligned} \tag{4.21}$$

حيث هنا: $\nabla_j (g^{ij} T) = \nabla^i T = g^{ij}\, \partial_j T$.

وبتعويض(4.21) و(4.18) في كلٍ من معادلات الحركة (4.4) وفي معادلة الحرارة والانفعال (4.6)، نحصل على المعادلات التالية، المحققة في $B \times A^+$:

$$\mu\, \nabla_k \nabla^k u^i + (\lambda + \mu)\, \nabla^i \nabla_k u^k + b^i + m\, \nabla^i T - \rho\, \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = 0 \tag{4.22}$$

$$(k\,\Delta - c\,\partial_t) T + m T_0 \nabla_k \dot{u}^k = -r \tag{4.23}$$

ندعوا (4.22) و(4.23) بالشكل التنسوري الناطق (في النظام الإحداثي المنحني η_i) لمعادلات لامي لحركة الجسم الترموديناميكي المرن $(\mathcal{H})$، المتجانس، والمتماثل المناحي.

إلى المعادلتين السابقتين، نضيف الشروط الحدية التالية:

الشروط الحدية، المحققة على $A \times \partial B$:

$$P^{i} = [\mu(\nabla^{j}u^{i} + \nabla^{i}u^{j}) + \lambda g^{ij}\nabla_{k}u^{k} + m g^{ij}T]n_{j}, \qquad (4.24)$$
$$Q = -k\, n^{i}\,\partial_{i}T$$

كما نضيف الشروط الابتدائية (4.12). ندعو (4.24)−(4.22) و(4.12) بالشكل التنسوري الناطق (في النظام الإحداثي المنحني η_i) لمسألة لامي للقيم الحدية والابتدائية للجسم الترموديناميكي المرن $(\mathcal{H})$، المتجانس، والمتماثل المناحي. أخيراً ندعو(4.24)−(4.22) و(4.12) و(4.19) و(4.20) بالشكل التنسوري الناطق (في النظام الإحداثي المنحني η_i) لوصف لامي للجسم الترموديناميكي المرن $(\mathcal{H})$، المتجانس، والمتماثل المناحي.

5. النتائج والمناقشة:

من أجل متطلبات هذه الفقرة تلزمنا الفرضية التالية.

فرضية 2: إن العلاقة التأسيسية الناطقة (4.10) تكافئ في $A \times B$، العلاقة التأسيسية الناطقة التالية في نفس النظام الاحداثي المنحني η_i:

$$E^{ji} = \frac{1}{2\mu}\left\{S^{ji} - \frac{g^{ij}}{1+\nu}\left[\nu S_{k}^{k} + (1-2\nu)\, m\, T\right]\right\} \qquad (5.1)$$

حيث:

$$E_{k}^{k} = \frac{1}{2\mu + 3\lambda}\left(S_{k}^{k} - 3mT\right) \qquad (5.2)$$

وحيث: $\nu = \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ هي نسبة بواسون.

البرهان: بضرب طرفي العلاقة التأسيسية، التنسورية الناطقة (4.10) بـ g_{ji}، نحصل على العلاقة التالية في $A \times B$:

$$g_{ji}S^{ji} = 2\mu\, g_{ji}E^{ji} + g_{ji}\, g^{ij}\left(\lambda E_{k}^{k} + m\, T\right) \qquad (5.3)$$

وبما أن ([13] أو [12] أو[11] أو[9]):

$$g_{ji}\, g^{ij} = \delta_{k}^{k} = 3 \ ، \ g_{ji}E^{ji} = E_{k}^{k} \ ، \ g_{ji}S^{ji} = S_{k}^{k} \qquad (5.4)$$

فنحصل من (5.3) على العلاقة التالية المحققة في $A \times B$:

$$E_{k}^{k} = \frac{1}{2\mu + 3\lambda}\left(S_{k}^{k} - 3mT\right)$$

بتعويض (5.4) في (5.1)، من ثم عزل E^{ji}، نحصل على العلاقة (5.1)،وبذلك يكون قد تم البرهان.

5. أ) الشكل التنسوري، الناطق(في النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i)، لمعادلات بيلترامي- ميشيل، للجسم اثترموديناميكي المرن $(\mathcal{H})$، المتجانس، والمتماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط B في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد ^{3} ،:

في [3]، وباعتماد النظام الاحداثي الديكارتي (أبسط أنظمة الاحداثيات المنحنية)، قام الباحث إغناتشاك باستنتاج معادلات بيلترامي- ميشيل من أجل الحالة الحركية المرنة لجسم هوك المرن (H)، المتجانس والمتماثل المناحي، والمتساوي درجات الحرارة. بعدها قام نفس الباحث، وفي النظام الاحداثي الديكارتي أيضاً، قام باستنتاج معادلات بيلترامي- ميشيل لأجل الحالة الترموديناميكية الخاصة للجسم، المتمثلة بحالة الإجهادات الحرارية (حالة الإجهادات الحرارية هي الحالة الخاصة من ترموديناميك الجسم المرن (H)، التي تكون فيها معادلة التوصيل الحراري بتابع مجهول، واحد فقط، هو تابع الحرارة، حيث المعادلة من النمط المافئي، بالتالي نتعامل مع الحرارة في باقي المعادلات، على أنها معلومة (prescribed)) . بعدها تمت مناقشة معادلات بيلترامي-ميشيل التنسورية المعممة والناطقة في نظام احداثي منحني كيفي η_i، لأجل الحالة متساوية درجات الحرارة للجسم الديناميكي (H)، المتجانس والمتماثل المناحي [18] .

وباعتماد النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i، سنوجد معادلات بيلترامي- ميشيل، التنسورية المعممة والناطقة في النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i،لأجل الحالة الحركية الحرارية (العامة)، للجسم الحركي الحراري المرن، المعتبر$(\mathcal{H})$، سالكين تعميم الطريقة المستخدمة في[18].

بتطبيق المشتق ∇^j على طرفي المعادلة التنسورية الناطقة (4.22)، من ثم بالاستفادة من خواص المشتق موافق التغيير، نحصل على المعادلة التنسورية الناطقة، التالية، المحققة في $B \times A^+$:

$$\mu \nabla^k \nabla_k \nabla^j u^i + (\lambda+\mu) \nabla^i \nabla^j \nabla_k u^k + m \nabla^i \nabla^j T - \rho \nabla^j \ddot{u}^i + \nabla^j b^i = 0 \tag{5.5}$$

وبالتبديل ما بين الدليلين i و j، في المعادلة (5.5)، نحصل على المعادلة التالية، المحققة في $B \times A^+$:

$$\mu \nabla^k \nabla_k \nabla^i u^j + (\lambda+\mu) \nabla^i \nabla^j \nabla_k u^k + m \nabla^i \nabla^j T - \rho \nabla^i \ddot{u}^j + \nabla^i b^j = 0 \tag{5.6}$$

الآن، بجمع (5.5) و(5.6)، من ثم بالأخذ بعين الاعتبار (4.19) و(4.18)، نحصل على المعادلة التنسورية الناطقة التالية في النظام الاحداثي المنحني η_i، والمحققة في $B \times A^+$:

$$2\mu \nabla^k \nabla_k E^{ij} + 2(\lambda+\mu) \nabla^i \nabla^j E_k^k + 2m \nabla^i \nabla^j T - \rho \ddot{E}^{ij} + \nabla^i b^j + \nabla^j b^i = 0 \tag{5.7}$$

لنضع، الآن: $\overset{*}{\square}_2 := \nabla^k \nabla_k - \dfrac{1}{\hat{c}_2^2} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$، حيث: $\hat{c}_2 := \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$، فتأخذ بذلك المعادلة التنسورية الناطقة (5.7)، الشكل التالي في $B \times A^+$، وفي النظام الإحداثي المنحني η_i:

$$2\mu \overset{*}{\square}_2 E^{ij} + 2(\lambda+\mu) \nabla^i \nabla^j E_k^k + 2m \nabla^i \nabla^j T + \nabla^i b^j + \nabla^j b^i = 0 \tag{5.8}$$

الآن، بتعويض (5.1) و(5.2) في(5.8)، و(4.18) و(5.2) في (4.23)، نحصل، بعد التبسيط والاختصار على المعادلتين التنسوريتين الناطقتين التاليتين في النظام الاحداثي المنحني η_i، والمحققتين في $B \times A^+$:

$$\overset{*}{\square}_2 S^{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} g^{ij} \overset{*}{\square}_2 S^k_k - m \frac{1-2\nu}{1+\nu} g^{ij} \overset{*}{\square}_2 T + \\ + \frac{1}{1+\nu} \nabla^i \nabla^j S^k_k - m \frac{1-2\nu}{1+\nu} \nabla^i \nabla^j T + \nabla^i b^j + \nabla^j b^i = 0 \quad , \tag{5.9}$$

$$D'T + \frac{mT_0}{k(2\mu+3\lambda)} \dot{S}^k_k = -\frac{r}{k} \tag{5.10}$$

حيث: $D' := D - \frac{3m^2 T_0}{k(2\mu+3\lambda)} \partial_t$ و $D := \nabla^j \nabla_j - \frac{c}{k} \partial_t$.

وبضرب طرفي المعادلة (5.9) بـ g_{ij} ، وبالاستفادة من خواص المشتق موافق التغيير والمشتق الزمني، ومن العلاقات (5.4)، نحصل بالنتيجة، على المعادلة التالية، المحققة في $B \times A^+$:

$$\overset{*}{\square}_2 S^k_k - \frac{3\nu}{1+\nu} \overset{*}{\square}_2 S^k_k - 3m \frac{1-2\nu}{1+\nu} \overset{*}{\square}_2 T + \\ + \frac{1}{1+\nu} \nabla^m \nabla_m S^k_k - m \frac{1-2\nu}{1+\nu} \nabla^k \nabla_k T + \nabla_k b^k + \nabla_k b^k = 0 \quad , \tag{5.11}$$

والتي بعد التبسيط والاختصار تأخذ الشكل التالي في $B \times A^+$:

$$\square_1 \left(S^k_k - 3mT \right) + \frac{m(2\mu+3\lambda)}{\lambda+2\mu} \nabla^k \nabla_k T = -\frac{2\mu+3\lambda}{\lambda+2\mu} \nabla_k b^k \tag{5.12}$$

حيث: $\square_1 := \nabla^k \nabla_k - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ و $c_1 := \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$. والتي تكتب بالشكل:

$$\square_1 S^k_k - 3m \left[\square_1 - \frac{2\mu+3\lambda}{3(\lambda+2\mu)} \nabla^k \nabla_k \right] T = -\frac{2\mu+3\lambda}{\lambda+2\mu} \nabla_k b^k \tag{5.13}$$

وبما أن:

$$\overset{*}{\square}_2 = \square_1 + \left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{\hat{c}_2^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{5.14}$$

فأننا نجد من المعادلة (5.13)، أن:

$$\overset{*}{\square}_2 S^k_k = \left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{\hat{c}_2^2} \right) \ddot{S}^k_k + 3m \left[\square_1 - \frac{2\mu+3\lambda}{3(\lambda+2\mu)} \nabla^k \nabla_k \right] T \\ - \frac{2\mu+3\lambda}{\lambda+2\mu} \nabla_k b^k \tag{5.15}$$

فمن جهة أولى، بتعويض (5.15) في (5.9)، نحصل، بعد التبسيط والاختصار، على المعادلة التنسورية الناطقة التالية في النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i ، والمحققة في $B \times A^+$:

$$
\begin{aligned}
&\overset{*}{\square}_2 S^{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} g^{ij} \left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{\hat{c}_2^2} \right) \ddot{S}^k_k \\
&-m\, g^{ij} \left\{ \overset{*}{\square}_2 - \frac{3\nu}{1+\nu} \left[\frac{2\mu+3\lambda}{3(\lambda+2\mu)} \nabla^k \nabla_k + \left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{\hat{c}_2^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \right\} T + \\
&+ \frac{\nu}{1+\nu} \frac{2\mu+3\lambda}{\lambda+2\mu} g^{ij} \nabla_k b^k + \frac{1}{1+\nu} \nabla^i \nabla^j S^k_k \\
&- m \frac{1-2\nu}{1+\nu} \nabla^i \nabla^j T + \nabla^i b^j + \nabla^j b^i = 0
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

أو:

$$
\begin{aligned}
&\overset{*}{\square}_2 S^{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} g^{ij} \left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{\hat{c}_2^2} \right) \ddot{S}^k_k \\
&-m g^{ij} \left\{ \overset{*}{\square}_2 - \frac{\nu}{1-\nu} \left[\nabla^k \nabla_k + \frac{3(1-\nu)}{1+\nu} \left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{\hat{c}_2^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \right\} T + \\
&+ \frac{1}{1+\nu} \nabla^i \nabla^j S^k_k - m \frac{1-2\nu}{1+\nu} \nabla^i \nabla^j T + \\
&+ \nabla^i b^j + \nabla^j b^i + \frac{\nu}{1-\nu} g^{ij} \nabla_k b^k = 0
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

وفي الخطوة الأخيرة، من (5.10)، نلاحظ أن:

$$
\begin{aligned}
&\overset{*}{\square}_2 T = \left[D' - \frac{1}{\hat{c}_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{k} \left(c + \frac{3m^2 T_0}{2\mu+3\lambda} \right) \partial_t \right] T = \\
&= - \frac{m T_0}{k\,(2\mu+3\lambda)} \dot{S}^i_j - \frac{r}{k} - \left[\frac{1}{\hat{c}_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{k} \left(c + \frac{3m^2 T_0}{2\mu+3\lambda} \right) \partial_t \right] T ,
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

$$
\begin{aligned}
&\nabla^j \nabla_j T = \left[D' + \frac{1}{k} \left(c + \frac{3m^2 T_0}{2\mu+3\lambda} \right) \partial_t \right] T = \\
&= - \frac{m T_0}{k\,(2\mu+3\lambda)} \dot{S}^i_j - \frac{r}{k} + \frac{1}{k} \left(c + \frac{3m^2 T_0}{2\mu+3\lambda} \right) \partial_t T
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

فبتعويض(5.18) و(5.19) في (5.17)، نحصل، بعد التبسيط والاختصار، على المعادلة التنسورية الناطقة التالية في النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i، والمحققة في $B \times A^+$:

$$\begin{aligned}
&\overset{*}{\square}_2 S^{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\, g^{ij} \left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{\hat{c}_2^2}\right) \ddot{S}^n_n + \\
&+m\, g^{ij} \left\{ \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left[\frac{m T_0}{k\,(2\mu+3\lambda)} \dot{S}^n_n + \frac{r}{k} - \frac{1}{k}\left(c + \frac{3m^2 T_0}{2\mu+3\lambda}\right)\frac{\partial T}{\partial t} \right] + \right. \\
&\left. + \left[\frac{1}{\hat{c}_2^2} + \frac{3\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{\hat{c}_2^2}\right) \right] \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right\} + \frac{1}{1+\nu}\, \nabla^i \nabla^j S^n_n - m\, \frac{1-2\nu}{1+\nu} \nabla^i \nabla^j\, T + \\
&+\nabla^i b^j + \nabla^j b^i + \frac{\nu}{1-\nu}\, g^{ij}\, \nabla_n b^n = 0
\end{aligned} \qquad (5.20)$$

التي نضيف إليها معادلة الحرارة والإجهاد (5.10)، المحققة أيضاً في $B \times A^+$.

ندعو (5.20) و(5.10) بالشكل التنسوري الناطق في النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i، لمعادلات بيلترامي- ميشيل، المعممة إلى الحالة الترموديناميكية المرنة للجسم $(\mathcal{H})$، المتجانس، والمتماثل المناحي (في [21] تم استنتاج معادلات بيلترامي- ميشيل التنسورية الصامدة، المعممة لأجل الحالة الترموديناميكية للجسم (H). المتجانس، والمتماثل المناحي. بينما (5.20) و(5.10) تعطينا مباشرةً معادلات بيلترامي- ميشيل الثرموديناميكية المعممة للجسم المدروس (H) وذلك في أي نظام إحداثي منحني η_i).

حالات خاصة:

أ- من أجل الحالة الخاصة المتمثلة بالحالة السكونية الحرارية المرنة للجسم $(\mathcal{H})$، تنعدم المشتقات الجزئية الزمنية في المعادلتين (5.20) و(5.10)، وبالتالي تأخذ هاتان المعادلتان الشكل التالي:

$$\begin{aligned}
&\nabla^n \nabla_n S^{ij} + \frac{1}{1+\nu}\, \nabla^i \nabla^j S^n_n - m\, \frac{1-2\nu}{1+\nu} \nabla^i \nabla^j\, T + \\
&+\nabla^i b^j + \nabla^j b^i + \frac{\nu}{1-\nu}\, g^{ij}\, \nabla_n b^n + \frac{1-2\nu}{1-\nu}\, \frac{m}{k}\, g^{ij}\, r = 0\,, \\
&\nabla^n \nabla_n T = -\frac{r}{k}
\end{aligned} \qquad (5.21)$$

وهي تعميم النتائج التي تم الحصول عليها في هيتنارسكي وإغناتشاك [2, p, 394] (2013)، لأجل النظام الاحداثي الديكارتي.

ب- من أجل حالة الإجهادات الحرارية (المتوافقة مع انعدام الحد الحاوي على: $\dot{S}^n_n - 3m\dot{T}$) ، تصبح (5.20) و(5.10)، بعد التبسيط والاختصار، بالشكل:

$$\begin{aligned}
&\overset{*}{\Box}_2 S^{ij} + \frac{1}{1+\nu}\,\nabla^i\,\nabla^j S_k^k - \frac{\nu}{1+\nu}\,g^{ij}\left(\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{\hat{c}_2^2}\right)\ddot{S}_k^k + \\
&-m\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\,g^{ij}\nabla^k\,\nabla_k T + m\,g^{ij}\left[\frac{1}{\hat{c}_2^2}+\frac{3\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{\hat{c}_2^2}\right)\right]\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \\
&-m\,\frac{1-2\nu}{1+\nu}\,\nabla^i\,\nabla^j\,T + \nabla^i b^j + \nabla^j b^i + \frac{\nu}{1-\nu}\,g^{ij}\,\nabla_k\,b^k = 0\,, \\
&D\,T = -\frac{r}{k}
\end{aligned} \qquad (5.22)$$

وهي تعميم النتائج التي تم الحصول عليها في [1]، بالشكل التنسوري الصامد، كما أنها تشكل تعميم النتائج التي تم الحصول عليها في[3]، لأجل النظام الاحداثي الديكارتي.

ج- من أجل الحالة الإيزوثرمية للجسم $(\mathcal{H})$ (أي لأجل الحالة: $m \to 0$)، تؤول عندئذٍ المعادلتان (5.20) و(5.10) إلى المعادلة التنسورية الناطقة التالية في النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i، والمحققة في $B \times A^+$:

$$\begin{aligned}
&\overset{*}{\Box}_2 S^{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\,g^{ij}\left(\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{\hat{c}_2^2}\right)\ddot{S}_k^k + \frac{1}{1+\nu}\,\nabla^i\,\nabla^j S_k^k + \\
&+\nabla^i b^j + \nabla^j b^i + \frac{\nu}{1-\nu}\,g^{ij}\,\nabla_k\,b^k = 0
\end{aligned} \qquad (5.23)$$

وهي نفس النتائج التي تم الحصول عليها في [18].

ومن أجل متطلبات الفقرة القادمة تلزمنا المبرهنة المساعدة التالية.

مبرهنة مساعدة1:

تشكل مجموعة المقاطع التنسورية الناطقة$\{u^i, S^{ji}, b^i\}$ جزءاً من السلوك الثرموديناميكي المرن للجسم $(\mathcal{H})$ في $\bar{B} \times A$، ومتوافقاً مع شروط البدء:

$$u^i(\eta, 0) = u^{0i}(\eta)\ ,\quad \dot{u}^i(\eta, 0) = \dot{u}^{0i}(\eta)\ :\ \eta \in \bar{B} \qquad (5.24)$$

إذا وفقط إذا كان:

$$j * \left(\nabla_k S^{ki}\right) + f^i = \rho u^i \quad \text{on } \bar{B} \times A \qquad (5.25)$$

البرهان:

لزوم الشرط: نفرض أن مجموعة المقاطع التنسورية الناطقة$\{u^i, S^{ji}, b^i\}$ تشكل جزءاً من السلوك الثرموديناميكي المرن للجسم $(\mathcal{H})$ في $\bar{B} \times A$، ومتوافقاً مع شروط البدء (5.24)، ولنثبت انطلاقاً من ذلك تحقق (5.25). من الفرض ينتج أن$\{u^i, S^{ji}, b^i\}$ تحقق معادلة الحركة (4.4) في $\bar{B} \times A^+$، إضافةً إلى شروط البدء (5.24). نطبق تحويل لابلاس التكاملي (انظر[13])، المعطى بحسب تعريفه بـ :

$$F(\eta, p) \equiv \bar{f}(\eta, p) \equiv \mathrm{L}\ [f(\eta, t)] := \int_0^\infty e^{-pt} f(\eta, t)\ dt \qquad (5.26)$$

حيث $f(\eta, t)$ أي مقطع تنسوري معرف على $\bar{B} \times A$ ويشكل أصلاً [13]، نطبقه على المعادلة (4.4) وعلى طرفي العلاقة (4.13)، ونستفيد من خواص هذا التحويل ومن شروط البدء (5.24)، ونستخدم مبرهنة بوريل في الطي، وبالاستفادة أيضاً من العلاقات:

$$\mathrm{L}(1) = \frac{1}{p} \;,\; \mathrm{L}(t) = \frac{1}{p^2} \tag{5.27}$$

فنحصل على:

$$\nabla_k \bar{S}^{ki} + \bar{b}^i = \rho\,(p^2 u^i - p\, u^{0i} - \dot{u}^{0i}) \tag{5.28}$$

$$\bar{f}^i = \frac{1}{p^2}\bar{b}^i + \rho\,(\frac{u^{0i}}{p} + \frac{\dot{u}^{0i}}{p^2}) \tag{5.29}$$

بتعويض (5.29) في (5.28)، نحصل على:

$$\frac{1}{p^2}\,\nabla_k \bar{S}^{ki} + \bar{f}^i = \rho u^i \tag{5.30}$$

وبتطبيق تحويل لابلاس التكاملي، العكسي على طرفي (5.30)، وبالاستفادة من $(5.27)_2$، ومن مبرهنة بوريل في الطي، نحصل على (5.25).

كفاية الشرط: نفرض أن (5.25) محققة، ولنثبت انطلاقاً من ذلك أن $\{u^i, S^{ji}, b^i\}$ تشكل جزءاً من السلوك الثرموديناميكي المرن للجسم $(\mathcal{H})$ في $\bar{B} \times A$، ومتوافقاً مع شروط البدء (5.24). فمن أجل اثبات أن $\{u^i, S^{ji}, b^i\}$ تشكل جزءاً من السلوك الترموديناميكي المرن للجسم $(\mathcal{H})$، نشتق (5.25)، جزئياً مرتين بالنسبة للزمن، آخذين بعين الاعتبار العلاقة (4.13)، والعلاقة:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(j * g) = g \tag{5.31}$$

فنحصل بذلك على معادلة الحركة (4.4) في $\bar{B} \times A^+$. ومن أجل اثبات أن $\{u^i, S^{ji}, b^i\}$ تتوافق مع شروط البدء (5.24)، لنلاحظ أن (5.25) محققة في $\bar{B} \times A$، بالتالي فهي محققة من أجل $t = 0$. فبوضع $t = 0$ في (5.25)، وبالأخذ بعين الاعتبار العلاقة (4.14) (من أجل: $t = 0$)، والعلاقة:

$$(j * g)\big|_{t=0} = 0 \tag{5.32}$$

فنحصل على $(5.24)_1$. أما باشتقاق طرفي العلاقة (5.25) جزئياً، مرة واحدة بالنسبة للزمن، من ثم بوضع $t = 0$، وبالأخذ بعين الاعتبار المشتق الجزئي الزمني الأول للعلاقة (4.14) (من أجل: $t = 0$)، والعلاقتين:

$$\frac{\partial}{\partial t}(j * g) = 1 * g \;\;,\;\; (1 * g)\big|_{t=0} = 0 \tag{5.33}$$

نحصل على $(5.24)_2$، وبذلك يكون قد اكتمل البرهان.

5. ب.1) الشكل التنسوري الناطق في النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i لمعادلات إغناتشاك، الحاكمة للحالة الثرموديناميكية المرنة للجسم $(\mathcal{H})$، المتجانس، المتماثل المناحي:

سنناقش فيمايلي الشكل التنسوري الناطق في النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i، لمعادلات إغناتشاك، التي تحكم الحالة الثرموديناميكية (العامة)، للجسم المرن $(\mathcal{H})$، المتجانس، والمتماثل المناحي، معتمدين طريقة، هي تعميم للطريقة المستخدمة في [1, 4, 20] (في [1] تم اثبات الاتمام للشكل الصامد لمسألة معادلات إغناتشاك بتوابع الإجهادات المجهولة، لأجل الحالة الخاصة المتمثلة بحالة الإجهادات الحرارية للجسم (H). وفي [20] تم اثبات الاتمام للشكل الصامد لمسألة معادلات إغناتشاك بتوابع الإجهادات، والحرارة، المجهولة، لأجل الحالة االترموديناميكية العامة للجسم (H) المتجانس ومتماثل المناحي). وبذلك نحصل على معادلات إغناتشاك التنسورية الناطقة في النظام المنحني الكيفي η_i، للجسم الثرموديناميكي المرن المدروس $(\mathcal{H})$، باتباع مايلي.

بتطبيق المشتق ∇^j على طرفي المعادلة التنسورية الناطقة (4.4) (بعد ضرب طرفيها بـ ρ^{-1})، نحصل على المعادلة التنسورية الناطقة التالية في النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i، والمحققة في $B \times A^+$:

$$\rho^{-1}\left(\nabla^j \nabla_k S^{ki} + \nabla^j b^i\right) = \nabla^j \ddot{u}^i \qquad (5.34)$$

وبالتبديل ما بين الدليلين i و j، في المعادلة (5.34)، نحصل على المعادلة الناطقة التالية، المحققة في $B \times A^+$:

$$\rho^{-1}\left(\nabla^i \nabla_k S^{kj} + \nabla^i b^j\right) = \nabla^i \ddot{u}^j \qquad (5.35)$$

بجمع (5.34) و(5.35)، ومن ثم بالأخذ بعين الاعتبار العلاقة الهندسية، التنسورية، الناطقة (4.19)، ومن ثم بالاستفادة من خواص المشتق موافق التغيير، نحصل على المعادلة التنسورية، الناطقة التالية، المحققة في $B \times A^+$:

$$\rho^{-1}\left[\nabla_k\left(\nabla^j S^{ki} + \nabla^i S^{kj}\right) + \nabla^i b^j + \nabla^j b^i\right] = 2\ddot{E}^{ij} \qquad (5.36)$$

وبتعويض العلاقة التنسورية الناطقة (5.1) في (5.36)، والعلاقة التنسورية الناطقة (5.2) في (4.6)، نحصل، بعد التبسيط والاختصار، على العلاقتين التنسوريتين الناطقتين التاليتين في النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i، والمحققتين في $B \times A^+$:

$$\begin{aligned} &\hat{c}_2^2\left[\nabla_k\left(\nabla^j S^{ki} + \nabla^i S^{kj}\right) + \nabla^i b^j + \nabla^j b^i\right] - \ddot{S}^{ij} + \\ &+ \frac{g^{ij}}{1+\nu}\left[\nu \ddot{S}^k_k + (1-2\nu)\, m \ddot{T}\right] = 0\,, \end{aligned} \qquad (5.37)$$

$$D'T + \frac{mT_0}{k\,(2\mu + 3\lambda)}\dot{S}^k_k = -\frac{r}{k} \qquad (5.38)$$

حيث نعود ونذّكِر بأن: $D' := D - \dfrac{3m^2 T_0}{k\,(2\mu+3\lambda)}\partial_t$ و $D := \nabla^j \nabla_j - \dfrac{c}{k}\partial_t$.

ندعو (5.37) و(5.38)، بالشكل التنسوري الناطق في النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i، لمعادلات إغناتشاك الثرموديناميكية، للجسم الثرموديناميكي المرن$(\mathcal{H})$، المتجانس والمتماثل المناحي.

إلى المعادلتين (5.37) و(5.38) نضيف الشروط الحدية (4.11)، والشروط الابتدائية التالية في $B\times\{0\}$ (وفقاً لتعميم [1]، فإن الشروط الابتدائية للمعادلتين (5.37) و(5.38) تنتج عن الشروط الابتدائية (4.12) وعن العلاقة الهندسية (4.19) وعن العلاقة التأسيسية (4.10) وعن المعادلة (4.6). انظر أيضاً [20]):

$$S^{ij}=S^{0ij}\ ,\ \dot{S}^{ij}=\dot{S}^{0ij}\ ,\ T=T^{0} \tag{5.39}$$

حيث:

$$S^{0ij}=\ 2\mu E^{0ij}+\ \lambda g^{ij}E^{0k}_{k}+m\ g^{ij}T^{0} \tag{5.40}$$

$$\dot{S}^{0ij}=\ 2\mu\dot{E}^{0ij}+\ (\lambda+\frac{m^{2}T_{0}}{c})\ g^{ij}\dot{E}^{0n}_{n}+\frac{m}{c}g^{ij}\,(k\,\nabla^{n}\nabla_{n}T^{0}+r^{0}) \tag{5.41}$$

$$E^{0ij}:=\frac{1}{2}(\nabla^{i}u^{0j}+\nabla^{j}u^{0i})\ \ ,\ \ E^{0k}_{k}=\nabla_{k}u^{0k} \tag{5.42}$$

$$\dot{E}^{0ij}:=\frac{1}{2}(\nabla^{i}\dot{u}^{0j}+\nabla^{j}\dot{u}^{0i})\ \ ,\ \ \dot{E}^{0k}_{k}=\nabla_{k}\dot{u}^{0k} \tag{5.43}$$

أخيراً: r^{0} تمثل القيمة الابتدائية لمقطع المصادر الحرارية، التنسوري، الصفري.

5. ب.2) مسألة الإتمام لمعادلات إغناتشاك التنسورية الناطقة في النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i، والحاكمة للحالة الثرموديناميكية، المرنة للجسم $(\mathcal{H})$، المتجانس، والمتماثل المناحي:

سنناقش الشكل التنسوري الناطق في النظام المنحني الكيفي η_i، لمسألة الإتمام لمعادلات إغناتشاك، الحاكمة للحالة الترموديناميكية، المرنة للجسم $(\mathcal{H})$، المتجانس، والمتماثل المناحي، من خلال المبرهنة التالية.

<u>*مبرهنة:*</u> يتوافق المقطعين التنسوريين الناطقين S^{ji} و T مع السلوك الترموديناميكي المرن للجسم $(\mathcal{H})$، إذا وفقط إذا تحققت معادلات إغناتشاك التنسورية الناطقة (5.37) و(5.38)، مع الشروط الحدية (4.11) والشروط الابتدائية (5.39).

البرهان:

لزوم الشرط: نفرض أن: $\mathcal{S}:=\{u^{i},E^{ji},S^{ji},T\}$ تمثل الحل لمسألة الوصف التقليدي (4.7)−(4.4) و(4.12)−(4.9). عندئذٍ بيَّنا منذ قليل أن المعادلات (5.37) و(5.38) تنتج عن حذف المقطعين التنسوريين الناطقين u^{i} و E^{ji} من المعادلات التنسورية الناطقة (4.4) و(4.6) و(4.9) و(4.10). ومن أجل إكمال برهان لزوم الشرط نطبق المشتق ∇^{j}على الشروط الابتدائية $(4.12)_{1,2}$، والمؤثر $\nabla^{n}\nabla_{n}$ على الشروط الابتدائية $(4.12)_{3}$، فنحصل على:

$$\begin{aligned}&\nabla^{j}u^{i}(\boldsymbol{\eta},0)=\nabla^{j}u^{0i}(\boldsymbol{\eta})\ \ ,\quad \nabla^{j}\dot{u}^{i}(\boldsymbol{\eta},0)=\nabla^{j}\dot{u}^{0i}(\boldsymbol{\eta})\ \ ,\\&\nabla^{n}\nabla_{n}T(\boldsymbol{\eta},0)=\nabla^{n}\nabla_{n}T^{0}(\boldsymbol{\eta})\end{aligned} \tag{5.44}$$

بالتالي:

$$\nabla^{i}u^{j}(\boldsymbol{\eta},0)=\nabla^{i}u^{0j}(\boldsymbol{\eta})\ \ ,\quad \nabla^{i}\dot{u}^{j}(\boldsymbol{\eta},0)=\nabla^{i}\dot{u}^{0j}(\boldsymbol{\eta}) \tag{5.45}$$

ينتج عن $_{1,2}$(5.44) و(5.45) وعن(4.19) و(4.18) ومشتقهما الجزئي الزمني الأول، أن:

$$\begin{aligned} E^{0ij}(\eta) &:= E^{ij}(\eta,0) = \frac{1}{2}\left[\nabla^i u^j(\eta,0) + \nabla^j u^i(\eta,0)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\nabla^i u^{0j}(\eta) + \nabla^j u^{0i}(\eta)\right], \end{aligned} \tag{5.46}$$

$$E_k^{0k}(\eta) = E_k^k(\eta,0) = \nabla_k u^k(\eta,0) = \nabla_k u^{0k}(\eta)\ , \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned} \dot{E}^{0ij}(\eta) &:= \dot{E}^{ij}(\eta,0) = \frac{1}{2}\left[\nabla^i \dot{u}^j(\eta,0) + \nabla^j \dot{u}^i(\eta,0)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\nabla^i \dot{u}^{0j}(\eta) + \nabla^j \dot{u}^{0i}(\eta)\right], \end{aligned} \tag{5.48}$$

$$\dot{E}_k^{0k}(\eta) = \dot{E}_k^k(\eta,0) = \nabla_k \dot{u}^k(\eta,0) = \nabla_k \dot{u}^{0k}(\eta)\ , \tag{5.49}$$

كما ينتج من المعادلة (4.6) (لأجل: $t = 0$) ومن الشروط $_3$(5.44) و(5.49)، أن:

$$\begin{aligned} \dot{T}(\eta) &:= \dot{T}(\eta,0) = \frac{1}{c}\left[k\ \nabla^n \nabla_n T(\mathbf{X},0) + mT_0 \dot{E}_k^k(\eta,0) + r(\eta,0)\right] \\ &= \frac{1}{c}\left[k\ \nabla^n \nabla_n T^0(\eta) + mT_0 \dot{E}_k^{0k}(\eta) + r^0(\eta)\right] \end{aligned} \tag{5.50}$$

حيث: $r^0(\eta) := r(\eta,0)$.

بتعويض (5.46) و(5.47) و$_3$(4.12) في العلاقة التأسيسية (4.10) (لأجل: $t = 0$)، وبتعويض (5.48) و(5.49) و(5.50) في المشتق الجزئي الزمني الأول للعلاقة التأسيسية (4.10) (لأجل: $t = 0$)، نحصل على الشروط الابتدائية $_{1,2}$(5.39). ينتج عن ذلك وعن$_3$(4.12)، أن الشروط الابتدائية (5.39) محققة، وبذلك يكون قد انتهى برهان لزوم الشرط.

كفاية الشرط: لنفرض أن المقطعين التنسوريين الناطقين S^{ji} و T يحققان (5.37) و(5.38)، مع الشروط الحدية (4.11) والشروط الابتدائية (5.39). لنشكل المقطع المتجهي الناطق u^i على $\bar{B} \times A$ بالعلاقة (5.25)، ولنشكل، أيضاً المقطع التنسوري الناطق E^{ji} بالعلاقة (5.1). بما أن (5.25) محققة، فبحسب المبرهنة المساعدة 1، فإن $\{u^i, S^{ji}, b^i\}$، تشكل جزءاً من السلوك الثرموديناميكي المرن للجسم $(\mathcal{H})$، متوافقاً مع شروط البدء$_{1,2}$(4.12)؛ أي تحقق معادلة الحركة (4.4) مع شروط البدء$_{1,2}$(4.12). هذا من جهة أولى. ومن جهة ثانية من المشتق الجزئي الزمني الأول للعلاقة (5.2)، نحصل على:

$$\dot{E}_k^k = \frac{1}{2\mu + 3\lambda}\left(\dot{S}_k^k - 3m\dot{T}\right) \tag{5.51}$$

بتعويض العلاقة السابقة في المعادلة (5.38)، نحصل على المعادلة (4.6). من أجل اكمال اثبات كفاية الشرط، يبقى علينا اثبات تحقق العلاقة الهندسية (4.19)، باتباع مايلي.

باستخدام العلاقة (5.1)، بعد اشتقاقها جزئياً، مرتين بالنسبة للزمن، تأخذ المعادلة (5.37) الشكل التالي في $B \times A^{+}$:

$$\frac{\rho^{-1}}{2}\left[\nabla_k\left(\nabla^j S^{ki}+\nabla^i S^{kj}\right)+\nabla^i b^j+\nabla^j b^i\right]=\ddot{E}^{ji} \qquad (5.52)$$

لكن باشتقاق طرفي (5.25)، جزئياً مرتين بالنسبة للزمن، نحصل على:

$$\ddot{u}^i=\rho^{-1}\left(\nabla_k S^{ki}+b^i\right) \qquad (5.53)$$

بتعويض (5.53) في (5.52)، نحصل على العلاقة التالية المحققة في $B \times A^{+}$:

$$\frac{1}{2}(\nabla^i \ddot{u}^j+\nabla^j \ddot{u}^i)=\ddot{E}^{ij} \qquad (5.54)$$

هذا من جهة. ومن جهة أخرى، بما أن المقطع التنسوري الناطق u^i يحقق الشروط الابتدائية $(4.12)_{1,2}$ والمقطع T يحقق الشرط الابتدائي $(4.12)_3$ (وضوحاً كونه هو نفس الشرط الابتدائي $(5.39)_3$)، فينتج عن ذلك وعن (5.1)، ومشتقها الجزئي الزمني الأول (لأجل: $t=0$)، وعن المعادلة (5.38) (لأجل: $t=0$)، وعن الشروط الابتدائية $(5.39)_{1,2}$، أن:

$$E^{ij}(\boldsymbol{\eta},0)=\frac{1}{2}\left[\nabla^i u^j(\boldsymbol{\eta},0)+\nabla^j u^i(\boldsymbol{\eta},0)\right],\ \boldsymbol{\eta}\in B \qquad (5.55)$$

$$\dot{E}^{ij}(\boldsymbol{\eta},0)=\frac{1}{2}\left[\nabla^i \dot{u}^j(\boldsymbol{\eta},0)+\nabla^j \dot{u}^i(\boldsymbol{\eta},0)\right],\ \boldsymbol{\eta}\in B \qquad (5.56)$$

الآن، بمكاملة (5.54)، مرتين بالنسبة للزمن، والأخذ بعين الاعتبار الشروط الابتدائية (5.55) و(5.56)، نحصل على العلاقة الهندسية، التالية، المحققة في $B \times A$:

$$E^{ij}=\frac{1}{2}(\nabla^i u^j+\nabla^j u^i) \qquad (5.57)$$

أخيراً، لنلاحظ أن المقطع التنسوري الناطق E^{ji}، المعطى بـ (5.57) و(5.55) و(5.56) يحقق (برفع الأدلة i و j و k و l في المعادلة التنسورية الناطقة (4.7) وذلك بأن نستبدل في (4.7) كل i بـ i' وكل j بـ j' وكل k بـ k' وكل l بـ l'، ومن ثم ضرب الناتج بـ: $g^{ii'}g^{jj'}g^{kk'}g^{ll'}$، نحصل بالنتيجة على المعادلة التنسورية الناطقة المكافئة التالية في النظام الاحداثي المنحني η_i، والمحققة في $B\times A$: $(\nabla^{kl}E^{ij}+\nabla^{ij}E^{kl}-\nabla^{ik}E^{jl}-\nabla^{jl}E^{ik}=0$:

$$\nabla^{kl}E^{ij}+\nabla^{ij}E^{kl}-\nabla^{ik}E^{jl}-\nabla^{jl}E^{ik}=0 \quad on\ B\times A \qquad (5.58)$$

حيث: $\nabla^{ij}:=\nabla^i\nabla^j$.

$$\begin{aligned}\nabla^{kl}\dot{E}^{ij}(\boldsymbol{\eta},0)+\nabla^{ij}\dot{E}^{kl}(\boldsymbol{\eta},0)-\nabla^{ik}\dot{E}^{jl}(\boldsymbol{\eta},0)\\-\nabla^{jl}\dot{E}^{ik}(\boldsymbol{\eta},0)=0\quad,\ \boldsymbol{\eta}\in B\end{aligned} \qquad (5.59)$$

وتعني (5.58) أن المقطع التنسوري الناطق E^{ji}، يحقق في $B \times A$ علاقة توافق الانفعال (4.7)، وبذلك يكون قد اكتمل برهان كفاية الشرط.

5- خلاصة وتوصيات:

أولا) الخلاصة: تم استنتاج معادلات بيلترامي – ميشيل المعممة إلى الثرموموديناميكية ومعادلات إغناتشاك الثرموديناميكية ومسألة الإتمام المتعلقة بها، بالشكل التنسوري الناطق في نظام احداثي منحني كيفي للجسم الثرموديناميكي المرن $(\mathcal{H})$ المتجانس والمتماثل المناحي.

ثانياً) توصيات: إن المعطيات التنسورية، الابتدائية في المبرهنة السابقة، تنتج عن الشروط الابتدائية لمقطعي الازاحات والحرارة، الناطقين، وعن العلاقة التأسيسية، والعلاقة الهندسية، ومعادلة التوصيل الحراري. الأمر الذي يؤدي إلى أن مقطع الانفعال، الابتدائي، الناطق: E^{0ij}، والمعدل الزمني الابتدائي لمقطع الانفعال، الناطق: $\dot{E}^{0ij}$، كلاهما يحقق معادلة توافق الانفعالات، التنسورية، الناطقة:

$$\begin{aligned} &\nabla^{kl} E^{0ij} + \nabla^{ij} E^{0kl} - \nabla^{ik} E^{0jl} - \nabla^{jl} E^{0ik} = 0 \quad , \\ &\nabla^{kl} \dot{E}^{0ij} + \nabla^{ij} \dot{E}^{0kl} - \nabla^{ik} \dot{E}^{0jl} - \nabla^{jl} \dot{E}^{0ik} = 0 \end{aligned} \qquad (6.1)$$

كونها تحقق:

$$E^{0ij} = \frac{1}{2}\left[\nabla^{i} u^{0j} + \nabla^{j} u^{0i}\right] , \ \dot{E}^{0ij} = \frac{1}{2}\left[\nabla^{i} \dot{u}^{0j} + \nabla^{j} \dot{u}^{0i}\right] \qquad (6.2)$$

ونوصي بمايلي:

التوصية الأولى: يمكن تعميم المبرهنة السابقة، على نحوٍ تكون فيه المعطيات الابتدائية من أجل المقطعين التنسوريين الناطقين: S^{ji} و T، اختيارية. في هذه الحالة، فإن مقطع الانفعال، الابتدائي، الناطق: E^{0ij}، والمعدل الزمني الابتدائي لمقطع الانفعال، الناطق: $\dot{E}^{0ij}$، الموافقين، والناتجين عن العلاقة التأسيسية، في الحالة العامة لا يحققان علاقة توافق الانفعال. مثل هذا التعميم يصف السلوك الترموديناميكي المرن بمعطيات ابتدائية غير متوافقة، أي يصف السلوك الترموديناميكي المرن لجسم مرن بعيوب، موزعة بشكل مستمر [1].

التوصية الثانية: استنتاج تلك الشروط الحدية والابتدائية التي تتمم مسألة معادلات بيلترامي- ميشيل التنسورية، المعممة إلى الحالة الترموديناميكية للجسم المرن $(\mathcal{H})$، *المتجانس، والمتماثل المناحي، بالشكلين التنسوريين الصامد والناطق.*

قائمة المصادر والمراجع

[1]- Hetnarski, R.B., and Ignaczak, J., (2011), The Mathematical Theory of Elasticity, Second Edition, CRC Press, Taylor & Francis Group, 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300, Boca Raton, FL 33487-2742.

[2]- Hetnarski, R.B., Ignaczak, J., Eslami, M.R., Noda, N., Sumi, N., and Tanigawa, Y., (2013), Theory of Elasticity and Thermal Stresses, Springer Science+Business Media Dordrecht.

[3]- Ignaczak, J., (1959), Direct determination of stresses from the stress equations of motion elasticity, Arch. Mech. Stos. 5, 9.

[4] – Ignaczak, J., (1963), A completeness problem for stress equations of motion in the linear elasticity, Arch.Mech. 15 Pp. 225-234 .

[5]- W. Nowocki, (1970), Theory of Elasticity, PWN Warsaw.

[6]- Gurtin, M.E, (2010), The Mechanics and Thermodynamics of Continua, Cambridge University Press.

[7] - Truesdell C., (1984), Mechanics of Solids, Volume II, Springer - Verlag Berlin Heidelberg GmbH.

[8]- Lysik, B., (1970), Matematyczne Podstawy Teorii Sprężystości, Politechnika Wrocłwska.

[9]- Drobot, S., (1971), On Cosserat Continua, Zastos .Math. 12, Pp.323 -346.

[10]-Philippe G.Ciarlet, (2005), An Introduction To Differential Geometry with Applications to Elasticity, Liu Bie Ju Centre For mathematical Sciences, Gty University of Hong Kong, Department of mathematics.

[11]- Heinbockel, J.H, (1996), Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics, Department of Mathematics and Statistics, Old Dominion University.

[12]- Hung Nguyen-Schåfer, (2017), Tensor Analysis and Elementary Differential Geo-metry for Physicists and Engineers, Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[13] – Debnath, L & Bhatta, D, (2007), Integral Transforms and their Applications, (Second Edition), CRC Press, Boca Raton, Florida.

[14]- R. Wojnar, (1973), On the uniqueness of solutions of stress equations of motion of the Beltrami-Michell type, Bull. Acad. Sci.Sér.Sci.Techn, 21 (1973), 57 [99].

[15]- R. Wojnar, (1973), A uniqueness theorem for a system of stress equations of motion in linear elasticity, Bull. Acad. Sci.Sér.Sci.Techn .2, 21 (1973), 63 [105].

[16]- S.N. Patnaik, I.Kaljevic, D.A.Hopkins and S.Saigal, (1995), Completed Beltrami-Michell formulation for mixed boundary value problems in elasticity, NASA Technical Memorandum 106809 (1995).

[17]- S.N. Patnaik, D.A.Hopkins, (2001), Stress Formulation in Three-Dimensional Elasticity, NASA/TP 210515 (2001).

[18]- Al-Hasan, M. and Saed, B., (2015), The generalization of Beltrami – Michell equations of Hooke elastic body to its dynamic state in a curve coordinate system, Journal of Al-Baath University, Vol.37, .2, Pp. 55-74.

[19]- Al-Hasan, M. and Attiah, W., (2019), The Hooke thermodynamical model in a curve coordinate system, Journal of Al-Baath University, Vol.41, .13, Pp. 137-152.

[20]- Al-Hasan, M. and Attiah, W., (2019), The invariable tensorial form of the Ignaczak equations for the Hooke thermodynamical model, Journal of Al-Baath University, Vol.41, .15, Pp. 89-104.

[21]- Attiah, W. and Al-Hasan, M., (2020), The generalized thermodynamical Beltrami – Michell tensorial equations for the general thermodynamical state of the Hooke body, AJSRP - Journal of Nature, Life and Applied Sciences, Volume (4), Issue (1) : 30 Mars 2020, Pp. 60 – 71.