Journal of Nature, Life and Applied Sciences
Volume (4), Issue (3) : 30 Sep 2020
P: 42 - 54

AJSRP
ISSN: 2522-3356

مجلة العلوم الطبيعية والحياتية والتطبيقية
المجلد (4)، العدد (3) : 30 سبتمبر 2020م
ص: 42 - 54

Summability of Orthogonal Series by Absolute Matrix Method

Ghina Mohammed Gehad Alhashemi

Mohammed Mahmoud Amer

Faculty of Science || Al-Baath University || Homs || Syria

Abstract: At the beginning of the 20th century, the theory of perpendicular series orthogonal, which treated sentences of orthogonal functions as a natural generalization of series theory. The perpendicular mass idyllability many methods, such as the Reimann, Norlund, Cesaro, Holder, and generalized Norlund methods, has been studied. In this research, we studied the summability of simple orthogonal series in different methods called absolute methods that rely heavily on differences.

This is done by relying on some research, articles and scientific books in the field of summability of series. The absolute matrix methods are one of the most important methods of absolute summability. Most absolute summability methods are special cases of absolute matrix method. We finally recommend a double case study.

Keywords: Matrix method, absolute matrix method, generalized norlund method, absolute generalized norlund, orthogonal series, summability.

قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة بالطريقة المصفوفية المطلقة

غنى محمد جهاد الهاشمي

محمد محمود عامر

كلية العلوم || جامعة البعث || حمص || سوريا

الملخص: ظهرت في مطلع القرن العشرين نظرية المتسلسلات المتعامدة، التي تتعامل مع جمل من الدوال المتعامدة كتعميم طبيعي لنظرية المتسلسلات. وقد تمت دراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة بالعديد من الطرائق مثل طرائق سيزارو وهولدر وريمان وبوريل وهاوسدورف ونيورلند ونيورلند المعممة والطريقة المصفوفية. كما تم في هذا البحث دراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة البسيطة بطرائق مختلفة نوعاً ما تسمى الطرائق المطلقة والتي تعتمد على الفروق بشكل عام. وذلك من خلال الاعتماد على بعض الأبحاث والمقالات والكتب العلمية في مجال قابلية جمع المتسلسلات.

إن الطريقة المصفوفية المطلقة تعد من أهم طرائق قابلية الجمع المطلقة، حيث إن معظم طرائق قابلية الجمع المطلقة، ما هي إلا حالات خاصة من الطريقة المصفوفية المطلقة. ونوصي أخيراً بدراسة الحالة المضاعفة.

الكلمات المفتاحية: الطريقة المصفوفية، الطريقة المصفوفية المطلقة، طريقة نيورلند المعممة، طريقة نيورلند المعممة المطلقة، المتسلسلة المتعامدة، قابلية الجمع.

المقدمة

إن تطور نظرية المتسلسلات المتعامدة بشكل عام والمتسلسلات المتعامدة النظامية بشكل خاص، لاسيما المتسلسلات المثلثية، لعب دوراً مهماً في حل العديد من المسائل الرياضية والفيزيائية ومعالجة المشاكل المعقدة في مجال الميكانيك، والكهرباء، والالكترونيات، وغيرها من العلوم التطبيقية الأخرى.

مشكلة البحث:

تكمن مشكلة البحث في تباعد المتسلسلات المتعامدة بشكل عام.

وفي اقتصار الدراسات السابقة على دراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة بالطرائق المطلقة البسيطة.

أسئلة البحث:

لا بدّ لنا في هذا البحث من طرح بعض الأسئلة والاستفسارات التي لم تجب عنها الدراسات السابقة بهذا الصدد:

1- ما الشروط التي تحققها المتسلسلة المتعامدة البسيطة لتكون قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية المطلقة؟

2- ما طبيعة الطريقة المصفوفية والطريقة المصفوفية المطلقة؟ هل هي مؤثرات أم ماذا؟

3- ما علاقة الطريقة المصفوفيّة المطلقة بباقي طرائق قابلية الجمع المطلقة؟

هدف البحث:

الهدف من هذا البحث هو دراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة البسيطة بالطريقة المصفوفية المطلقة، وتبيان ماهية الطريقة المصفوفية المطلقة وعلاقتها بباقي طرائق قابلية الجمع.

أهمية البحث:

تلعب المتسلسلات المتعامدة البسيطة والمضاعفة دوراً كبيراً في التحليل الرياضي بشكل عام، وفي نظرية التقريب بشكل خاص، وذلك في حالة التقارب كما هو معروف، وأيضاً في حالة التباعد حيث تقرّب باستخدام المؤثرات الخطية الشهيرة (طرائق قابلية الجمع).

منهجيّة البحث: سنعتمد في هذا البحث على بعض المقالات والكتب العلمية ذات الصلة.

2- الإطار النظري والدراسات السابقة

وبالتالي من أجل أي جملة متعامدة نحصل على متسلسلة متعامدة.

تعريف 1: الطريقة المصفوفية (A) (Matrix method): [1]

تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع إلى المجموع s بالطريقة المصفوفية التي مصفوفتها $A = (a_{n,k})$ إذا كانت: $\lim_{n\to\infty} t_n^A = s$

حيث أن: $t_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_k$ و $S_k = \sum_{n=0}^{k} u_n$ متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$، والمصفوفة $A = (a_{n,k})$ هي مصفوفة مثلثية سفلى غير منتهية من الثوابت الحقيقية.

(أو نقول إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع (A) إلى المجموع s).

ونكتب عندئذٍ: $(A)\ \ \sum_{n=0}^{\infty} u_n = s$.

ملاحظة: تكون المصفوفة $A = (a_{n,k})$ نظامية إذا وفقط إذا كان: [1]

$$\lim_{n\to\infty} S_n = s \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} t_n^A = s$$

تعريف 2: الطريقة المصفوفية المطلقة $|A|$ (Absolute matrix method): [2]

تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية المطلقة التي مصفوفتها

$A = \left(a_{n,k}\right)$ إذا كان: $\sum_{n=1}^{\infty}|t_n - t_{n-1}| < \infty$.

(أي أن t_n ذات تغيرات محدودة).

حيث أن: $t_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, S_k$ و $S_k = \sum_{n=0}^{k} u_n$ متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$، والمصفوفة $A = \left(a_{n,k}\right)$ هي مصفوفة مثلثية سفلى غير منتهية من الثوابت الحقيقية.

(أو نقول إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع $|A|$).

ملاحظة: تكون المصفوفة $A = \left(a_{n,k}\right)$ نظامية مطلقاً إذا وفقط إذا كان:

$$\{S_n\} \in B.V \quad \Rightarrow \quad \{t_n\} \in B.V$$

تعريف 3: الطريقة المصفوفية المطلقة $1 \le k\,, |A|_k$: [3]

لتكن $A = \left(a_{n,k}\right)$ مصفوفة مثلثية سفلى و(S_n) متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

عندئذٍ: $t_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\ S_k$.

تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع $1 \le k\,, |A|_k$ إذا كان:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}|t_n - t_{n-1}|^k < \infty$$

وتكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع $0 \le \delta\,, 1 \le k\,, |A,\delta|_k$ إذا كان:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\delta k+k-1}|t_n - t_{n-1}|^k < \infty$$

تعريف 4: الطريقة المصفوفية المطلقة $1 \le k\,, |A,\alpha_n|_k$: [4]

لتكن $A = \left(a_{n,k}\right)$ مصفوفة مثلثية سفلى و$\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

ولتكن $\{\alpha_n\}$ متتالية غير سالبة،

عندئذٍ تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع $1 \le k\,, |A,\alpha_n|_k$ إذا كان:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n|t_n - t_{n-1}|^k < \infty$$

حيث $t_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\ S_k$

تعريف 5: الطريقة المصفوفية المطلقة $1 \le k\,, |A,p_n|_k$: [4]

لتكن $A = \left(a_{n,k}\right)$ مصفوفة مثلثية سفلى عناصرها غير معدومة.

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, S_k \quad , n = 0,1,\ldots$$

تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع $1 \le k\,, |A,p_n|_k$ إذا كان: [2,4,8,9]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}|t_n - t_{n-1}|^k < \infty$$

حيث إن $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \to \infty \ ; n \to \infty$

وتكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع $0 \le \delta\,, 1 \le k\,, |A,p_n,\delta|_k$ إذا كان: [4,9]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}|t_n - t_{n-1}|^k < \infty$$

تعريف 6: تعريف طريقة نيورلند المعممة: [5,6]

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ متسلسلة لانهائية، ولتكن $\{S_n\}$ متتالية مجاميعها الجزئية، ولتكن المتتاليتان $\{p_n\}$ و$\{q_n\}$، ولنعرف تلاقّهما بالشكل:

$$R_n = (p*q)_n = \sum_{m=0}^{n} p_m\, q_{n-m} = \sum_{m=0}^{n} p_{n-m}\, q_m \ ; \ (p*q)_n \ne 0\,; \forall n$$

إن تحويل طريقة نيورلند المعممة يعطى بالشكل:

$$t_n^{(N,p,q)} = \frac{1}{(p*q)_n} \sum_{m=0}^{n} p_{n-m}\, q_m\, S_m$$

تعريف 7: طريقة نيورلند المعممة المطلقة: [6]

تكون المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المطلقة $|N,p,q|$ إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \left|t_n^{(N,p,q)} - t_{n-1}^{(N,p,q)}\right|$ متقاربة أي: $\sum_{n=0}^{\infty} \left|t_n^{(N,p,q)} - t_{n-1}^{(N,p,q)}\right| < \infty$

ونكتب: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \in |N,p,q|$.

حيث إن $\left(t_{-1}^{(N,p,q)} = 0\right)$.

تعريف 8: المتسلسلة المتعامدة البسيطة: [6]

لتكن $\{\varphi_n\}$ جملة متعامدة معرفة على الفترة (a,b) وبفرض أن الدالة f تنتمي إلى الفضاء $L^2(a,b)$ وبالتالي يمكننا أن نكتب: $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$

حيث: $a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \quad ; \quad n = 0,1,2,\dots$

حيث إننا نقصد بالمتسلسلة المتعامدة تلك التي تكون جملتها متعامدة.

ملاحظة1: لا نقول قابلة للجمع مطلقاً (بإطلاق) بطريقة نيورلند المعممة لأن ذلك يعني وقتئذٍ أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المعممة (N,p,q)، وهذا خارج عن نطاق الدراسة في هذا البحث، فالمقصود بالمطلقة في تعريفنا هو الطريقة وليس المتسلسلة.

ملاحظة2: إن متسلسلة فورييه هي حالة خاصة من المتسلسلات المتعامدة.

ملاحظة 3: تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المطلقة $|N,p,q|_k$ إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1} \left|t_n^{(N,p,q)} - t_{n-1}^{(N,p,q)}\right|^k$ متقاربة.

أو: إذا تحقق أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1} \left|t_n^{(N,p,q)} - t_{n-1}^{(N,p,q)}\right|^k < \infty$$

<u>**مبرهنة 1:**</u> [5,6]

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{R_n^j}{R_n} - \frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}\right)^2 |a_j|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$ متقاربة فإن المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المعممة المطلقة $|N,p,q|$.

حيث إن:

$$R_n := (p*q)_n \;, \qquad R_n^j := \sum_{m=j}^{n} p_{n-m} q_m \;, R_n^{n+1} = 0 \,, R_n^0 = R_n$$

$$P_n := (p*1)_n = \sum_{m=0}^{n} p_m \;, \qquad Q_n := (1*q)_n = \sum_{m=0}^{n} q_m$$

مبرهنة 2: [5,6]

لتكن $\{\Omega(n)\}$ متتالية موجبة بحيث إن $\left\{\frac{\Omega(n)}{n}\right\}$ متتالية متناقصة وبحيث تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\Omega(n)}$ متقاربة. ولتكن $\{p_n\}$ و$\{q_n\}$ متتاليتين غير سالبتين.

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\Omega(n)w(n)$ متقاربة، عندئذ يكون:

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)\in|N,p,q|$ حيث $w(n)$ تعرف بالشكل:

$$w(j) := \frac{1}{j}\sum_{n=j}^{\infty}n^2\left(\frac{R_n^j}{R_n}-\frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}\right)^2$$

النتائج:

لنضع بداية الفرضيات الآتية: [3,4,8,9]

$$A := (a_{n,v})$$

$$\bar{A} := (\bar{a}_{n,v})\ ;\ \bar{a}_{n,v} = \sum_{i=v}^{n}a_{n,i}\quad ; n,i = 0,1,2,\ldots$$

$$\hat{A} := (\hat{a}_{n,v})\ ;\ \hat{a}_{n,v} = \bar{a}_{n,v} - \bar{a}_{n-1,v}\quad ; n = 1,2,\ldots$$

وبالتالي يمكننا أن نكتب:

$$t_n^A = \sum_{k=0}^{n}\bar{a}_{n,k}.u_k\quad ;\quad \bar{a}_{n,k} = \sum_{r=k}^{n}a_{n,r}$$

وذلك لأن:

$$t_n^A = \sum_{k=0}^{n}a_{n,k}S_k = \sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\sum_{r=0}^{k}u_r$$
$$= \sum_{r=0}^{n}u_r\sum_{k=r}^{n}a_{n,k} = \sum_{r=0}^{n}\bar{a}_{n,r}u_r$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\bar{a}_{n,k}u_k$$

استفدنا من دستور ديني الآتي:

$$\sum_{i=0}^{m}f(i)\sum_{j=0}^{n}g(j) = \sum_{j=0}^{m}g(j)\sum_{i=j}^{m}f(i)$$

وبفرض أن:

$$\hat{a}_{n,k} = \Delta_1\bar{a}_{n-1,k} = \bar{a}_{n,k} - \bar{a}_{n-1,k}$$

نجد:

$$\hat{a}_{n,n} = \bar{a}_{n,n} - \underbrace{\bar{a}_{n-1,n}}_{=0} = \bar{a}_{n,n}$$

$$\bar{a}_{n,n} = \sum_{r=n}^{n} a_{n,r} = a_{n,n}$$
$$\hat{a}_{n,n} = \bar{a}_{n,n} = a_{n,n}$$
$$\hat{a}_{0,0} = \bar{a}_{0,0} = a_{0,0}$$
$$\hat{a}_{1,1} = \bar{a}_{1,1} = a_{1,1}$$
$$\Delta_1 t_n^A = \sum_{k=0}^{n} \hat{a}_{n,k} u_k$$

مبرهنة 3:

الشرط اللازم والكافي لتكون الطريقة المصفوفية المطلقة المثقلة $|A|_\lambda$ (حيث $1 \geq \lambda$) نظامية هو أن يتحقق:

1. $ka_{n,k} = n\hat{a}_{n,k}$ حيث $0 \leq k \leq n$
2. $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n,k} = \frac{1}{k}$

حيث إن:

$$\hat{a}_{n,k} = \bar{a}_{n,k} - \bar{a}_{n-1,k}$$
$$\bar{a}_{n,k} = \sum_{r=k}^{n} a_{n,r}$$

الإثبات:

لتكن المتتالية $\{S_n\}$ محققة للعلاقة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} |S_n - S_{n-1}|^\lambda < \infty \quad \ldots (*)$$

ولنثبت أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} \left|t_n^A - t_{n-1}^A\right|^\lambda < \infty$$

لدينا:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} \left|t_n^A - t_{n-1}^A\right|^\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \left|n\left(t_n^A - t_{n-1}^A\right)\right|^\lambda$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left|\tau_n^A\right|^\lambda$$

حيث إن:

$$\tau_n^A = n\left(t_n^A - t_{n-1}^A\right)$$

وبالاعتماد على الشرط 1 ($ka_{n,k} = n\hat{a}_{n,k}$) نحصل على:

$$\tau_n^A = n\left(t_n^A - t_{n-1}^A\right) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} k u_k$$

لأن:

$$\begin{aligned}
l_2 = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} k u_k &= \sum_{k=0}^{n} n \hat{a}_{n,k} u_k \\
= n \sum_{k=0}^{n} \hat{a}_{n,k} u_k &= n \sum_{k=0}^{n} \left(\bar{a}_{n,k} - \bar{a}_{n-1,k}\right) u_k \\
&= n\left(\sum_{k=0}^{n} \bar{a}_{n,k} u_k - \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_{n-1,k} u_k\right) \\
&= n\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_k - \sum_{k=0}^{n-1} \bar{a}_{n-1,k} u_k - \underbrace{\bar{a}_{n-1,n}}_{=0} u_n\right) \\
&= n\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_k - \sum_{k=0}^{n-1} \bar{a}_{n-1,k} u_k\right) \\
&= n\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} S_k\right) \\
&= n\left(t_n^A - t_{n-1}^A\right) = l_1
\end{aligned}$$

إذاً:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1}\left|t_n^A - t_{n-1}^A\right|^{\lambda} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left|\tau_n^A\right|^{\lambda} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} k u_k\right|^{\lambda}
\end{aligned}$$

وحسب متراجحة هولدر للمجاميع نحصل على:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1}\left|t_n^A - t_{n-1}^A\right|^{\lambda} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} k^{\lambda} |u_k|^{\lambda} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\right)^{\lambda-1}$$

لكن: $\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = 1$ (وذلك لأن الطريقة المصفوفية A تحقق الشروط النظامية).

وبالتالي:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1}\left|t_n^A - t_{n-1}^A\right|^{\lambda} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} k^{\lambda} |u_k|^{\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^{\lambda} |u_k|^{\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n,k}
\end{aligned}$$

وبالاعتماد على الشرط الثاني ($\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n}a_{n,k}=\frac{1}{k}$) يكون لدينا:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1}\left|t_n^A-t_{n-1}^A\right|^{\lambda}\leq\sum_{k=1}^{\infty}k^{\lambda}|u_k|^{\lambda}\frac{1}{k}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}k^{\lambda-1}|u_k|^{\lambda}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{\lambda-1}|u_n|^{\lambda}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}n^{\lambda-1}|S_n-S_{n-1}|^{\lambda}<\infty$$

وذلك حسب العلاقة $(*)$.

وهو المطلوب إثباته.

<u>مثال:</u> مصفوفة سيزارو $(C,1)$:

من المعلوم أن:

$$t_n^{(C,1)}=\frac{1!}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k=\sum_{k=0}^{n}C_{n,k}^{1}S_k$$

حيث:

$$C_{n,k}^{1}=\frac{1}{n+1}$$

كما أن:

$$t_n^{(C,1)}=\sum_{k=0}^{n}\overline{C_{n,k}^{1}}u_k=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n-k+1}{n+1}\right)u_k$$

حيث:

$$\overline{C_{n,k}^{1}}=\frac{n-k+1}{n+1}$$
$$\widehat{C_{n,k}^{1}}=\overline{C_{n,k}^{1}}-\overline{C_{n-1,k}^{1}}=\frac{n-k+1}{n+1}-\frac{n-k}{n}$$
$$=\frac{n(n-k+1)-(n+1)(n-k)}{n(n+1)}$$
$$=\frac{n^2-nk+n-n^2-n+nk+k}{n(n+1)}=\frac{k}{n(n+1)}$$

لاحظ أن:

$$C_{n,n}^{1}=\frac{1}{n+1}\quad,\overline{C_{n,n}^{1}}=\frac{1}{n+1}\quad,\widehat{C_{n,n}^{1}}=\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n+1}$$

أي أن:

$$C_{n,n}^{1}=\overline{C_{n,n}^{1}}=\widehat{C_{n,n}^{1}}$$

مبرهنة 4:

إذا كانت من أجل $1 \leq k \leq 2$ المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left|a_{n,n}\right|^{\frac{2}{k}-2}\sum_{j=0}^{n}\left|\hat{a}_{n,j}\right|^{2}\left|c_{j}\right|^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

متقاربة، كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ قابلة للجمع بالطريقة $|A|_k$ تقريباً في كل مكان.

الإثبات:

بفرض أن $A_n(x)$ تحويل الطريقة المصفوفية التي مصفوفتها A ، عندئذٍ:

$$A_n(x) = \sum_{v=0}^{n} a_{n,v}S_v(x) = \sum_{v=0}^{n} a_{n,v}\sum_{j=0}^{v} c_j\varphi_j(x)$$

بتطبيق دستور فوبيني نجد أن:

$$= \sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j(x)\sum_{v=j}^{n} a_{n,v} = \sum_{j=0}^{n} \bar{a}_{n,j}c_j\varphi_j(x)$$

حيث إن $\sum_{j=0}^{v} c_j\varphi_j(x)$ هي متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{j=0}^{\infty} c_j\varphi_j(x)$.

وبالتالي فإن:

$$\bar{\Delta}A_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \bar{a}_{n,j}c_j\varphi_j(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \bar{a}_{n-1,j}c_j\varphi_j(x)$$

$$A_n(x) - A_{n-1}(x) = \bar{a}_{n,n}c_n\varphi_n(x) + \sum_{j=0}^{n-1}\left(\bar{a}_{n,j} - \bar{a}_{n-1,j}\right)c_j\varphi_j(x)$$

$$= \hat{a}_{n,n}c_n\varphi_n(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \hat{a}_{n,j}c_j\varphi_j(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \hat{a}_{n,j}c_j\varphi_j(x)$$

باستخدام متراجحة هولدر للتكاملات وبالاعتماد على التعامد نحصل على:

$$\int_a^b |\bar{\Delta}A_n(x)|^k dx \leq (b-a)^{1-\frac{k}{2}}\left(\int_a^b |A_n(x) - A_{n-1}(x)|^2 dx\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$= (b-a)^{1-\frac{k}{2}}\left(\int_a^b \left|\sum_{j=0}^{n} \hat{a}_{n,j}c_j\varphi_j(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$= (b-a)^{1-\frac{k}{2}}\left\{\sum_{j=0}^{n}\left|\hat{a}_{n,j}\right|^2\left|c_j\right|^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

وبالتالي فإن:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{n,n}\right|^{1-k}\int_a^b|\bar{\Delta}A_n(x)|^k dx \le K\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left|a_{n,n}\right|^{\frac{2}{k}-2}\sum_{j=0}^{n}\left|\hat{a}_{n,j}\right|^2\left|c_j\right|^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

وبالتالي تكون المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{n,n}\right|^{1-k}|\bar{\Delta}A_n(x)|^k$$

متقاربة تقريباً في كل مكان، وحسب تمهيدية (Beppo-Levi) نحصل على المطلوب.

ملاحظة:

دائماً يمكننا كتابة:

$$\bar{\Delta}A_n(x) = A_n(x) - A_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n}\hat{a}_{n,k}u_k$$

حيث إن:

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n}a_{n,k}S_k = \sum_{k=0}^{n}\bar{a}_{n,k}u_k$$

وبفرض أن:

$$H^{(k)}(A;j) := \frac{1}{j^{\frac{2}{k}-1}}\sum_{n=j}^{\infty}n^{\frac{2}{k}}\left|na_{n,n}\right|^{\frac{2}{k}-2}\left|\hat{a}_{n,j}\right|^2 \quad \dots(*)$$

نستطيع إثبات صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة 5:

لتكن $1 \le k \le 2$ و لتكن $\{\Omega(n)\}$ متتالية موجبة وتحقق أن المتتالية $\left\{\frac{\Omega(n)}{n}\right\}$ غير متزايدة وبحيث تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\Omega(n)}$ متقاربة.

عندئذٍ إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\Omega^{\frac{2}{k}-1}(n)H^{(k)}(A;n)$ متقاربة، كانت المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$ قابلة للجمع $|A|_k$ تقريباً في كل مكان، حيث إن $H^{(k)}(A;j)$ معرفة بالشكل:

$$H^{(k)}(A;j) := \frac{1}{j^{\frac{2}{k}-1}}\sum_{n=j}^{\infty}n^{\frac{2}{k}}\left|na_{n,n}\right|^{\frac{2}{k}-2}\left|\hat{a}_{n,j}\right|^2$$

الإثبات:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{n,n}\right|^{1-k}\int_a^b|\bar{\Delta}A_n(x)|^k dx \le K\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{n,n}\right|^{1-k}\left\{\sum_{j=0}^{n}\left|\hat{a}_{n,j}\right|^2\left|c_j\right|^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$\le K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\Omega(n))^{\frac{2-k}{2}}}\left\{\left|a_{n,n}\right|^{\frac{2}{k}-2}(n\Omega(n))^{\frac{2}{k}-1}\sum_{j=0}^{n}\left|\hat{a}_{n,j}\right|^2\left|c_j\right|^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$\le K\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\Omega(n)}\right)^{\frac{2-k}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{n,n}\right|^{\frac{2}{k}-2}(n\Omega(n))^{\frac{2}{k}-1}\sum_{j=0}^{n}\left|\hat{a}_{n,j}\right|^2\left|c_j\right|^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$\le K\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left|c_j\right|^2\sum_{n=j}^{\infty}\left|a_{n,n}\right|^{\frac{2}{k}-2}(n\Omega(n))^{\frac{2}{k}-1}\left|\hat{a}_{n,j}\right|^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$\le K\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left|c_j\right|^2\left(\frac{\Omega(j)}{j}\right)^{\frac{2}{k}-1}\sum_{n=j}^{\infty}n^{\frac{2}{k}}\left|na_{n,n}\right|^{\frac{2}{k}-2}\left|\hat{a}_{n,j}\right|^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$= K\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left|c_j\right|^2\Omega^{\frac{2}{k}-1}(j)H^{(k)}(A;j)\right\}^{\frac{k}{2}}$$

وبحسب فرضيات المبرهنة نحصل على تمام الإثبات.

نتيجة 1:

من أجل $a_{n,v} = \frac{p_{n-v}q_v}{R_n}$ لدينا $a_{n,n} = \frac{p_0 q_n}{R_n}$

$$\hat{a}_{n,v} = \bar{a}_{n,v} - \bar{a}_{n-1,v}$$
$$= \sum_{j=v}^{n} a_{n,j} - \sum_{j=v}^{n-1} a_{n-1,j}$$
$$= \frac{1}{R_n}\sum_{j=v}^{n} p_{n-j}q_j - \frac{1}{R_{n-1}}\sum_{j=v}^{n-1} p_{n-1-j}q_j$$
$$= \frac{R_n^v}{R_n} - \frac{R_{n-1}^v}{R_{n-1}}$$

وبالتالي فإن:

$$\hat{a}_{n,j} = \frac{R_n^j}{R_n} - \frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}$$

وبالتالي تكون المبرهنتان 1 و2 عبارة عن حالتين خاصتين من المبرهنتين 4 و5 على الترتيب.

نتيجة 2: من المعلوم في طريقة سيزارو $(C,2)$ أن:

$$C_{n,k}^{2}=\frac{2(n-k+1)}{(n+1)(n+2)} \quad ,C_{n,n}^{2}=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

$$\overline{C_{n,k}^{2}}=\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$\widehat{C_{n,k}^{2}}=\frac{2k(n-k+1)}{n(n+1)(n+2)}$$

وبالتالي نستنتج صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة 6:

إذا كانت من أجل $1\le k\le 2$ المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left|\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right|^{\frac{2}{k}-2}\sum_{j=0}^{n}\left|\frac{2j(n-j+1)}{n(n+1)(n+2)}\right|^{2}\left|c_j\right|^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

متقاربة، كانت المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$ قابلة للجمع $|C,2|_k$ تقريباً في كل مكان.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{n^k(n+1)(n+2)}\right)^{\frac{2}{k}}\sum_{j=0}^{n}j^2(n-j+1)^2\left|c_j\right|^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

الخلاصة:

في هذا البحث قمنا بدراسة الطريقة المصفوفية المطلقة وبعض حالاتها الخاصة ولا سيما طريقة نيورلند المعممة المطلقة، ودرسنا بواسطتهما قابلية جمع المتسلسلة المتعامدة البسيطة، علماً أن هذه المتسلسلة ليست متقاربة في الحالة العامة.

التوصيات:

نوصي بدراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بالطرائق المطلقة المضاعفة كمتسلسلات فوريه ومتسلسلات فوريه – جاكوبي وغيرها.

المصادر والمراجع:

1. S. Lal, and P. Yadav, "Matrix summability of The Conjugate Series Of Derived Fourier Series ", (2002), 367-372.
2. H. S. Ozarslan and H. N. Ogduk, "On Absolute Matrix Summability Methods ", Indian acad, (2005), 2517-2522.
3. H. S. Ozarslan and H. N. Ogduk, " On absolute matrix summability methods ", (2007), 213-220.
4. Hikmet Seyhan, Ozarslan and Enes Yavuz, " New Theorems for Absolute Matrix Summability Factors", Indian acad, (2014), 63-70.

5. Xhevat Z. Krasniqi , "on absolute generalized Norlund summability of double orthogonal series", (2011).
6. Xhevat Z. Krasniqi1, Huseyin Bor, Naim L. Braha and Marjan Dema, " On Absolute Matrix Summability of Orthogonal Series ", (2012), 493-501.
7. S. Yildiz "A new theorem on absolute matrix summability of Fourier series", (2016).
8. S. Yildiz, " A new study on the absolute matrix summability of non-decreasing sequences", Indian acad, (2017), 1-8.
9. S. Yildiz, " A New Generalization On Absolute Matrix Summability Factors Of Fourier Series ", (2017), 65-73.