Journal of Nature, Life and Applied Sciences
Volume (4), Issue (2) : 30 June 2020
P: 30 - 41

AJSRP
ISSN: 2522-3356

مجلة العلوم الطبيعية والحياتية والتطبيقية
المجلد (4)، العدد (2) : 30 يونيو 2020م
ص: 30 - 41

Hermite functions and special Hermite functions depending on Heisenberg group

Soha Ali Salamah

Faculty of Sciences || Al-Baath University || Syria

Abstract: In this paper, we talk about Heisenberg group, the most known example from the lie groups. After that, we talk about the representation theory of this group, and the relationship between the representation theory of the Heisenberg group and the position and momentum operator and momentum operators (ors). relationship between the representation theory of the Heisenberg group and the position and momentum, that shows how we will make the connection between the Heisenberg group and physics .

Then we introduce and study some properties of the Hermite and special Hermite functions. These functions are eigenfunctions of the Hermite and special Hermite operators, respectively. The Hermite operator is often called the harmonic oscillator and the special Hermite operator is sometimes called the twisted Laplacian. As we will later see, the two operators are directly related to the sub-laplacian on the Heisenberg group. The theory of Hermite and special Hermite expansions is intimately connected to the harmonic analysis on the Heisenberg group. They play an important role in our understanding of several problems on $\mathbb{H}^n$.

Keywords: Heisenberg group, The Schrödinger Representations, Fourier_ Wigner transform, Hermite Functions, Special Hermite Functions.

دوال هرميت ودوال هرميت الخاصة اعتماداً على زمرة هايزنبرغ

سهى علي سلامة

كلية العلوم || جامعة البعث || سوريا

الملّخص: عرّفنا في بحثنا هذا زمرة هايزنبرغ، وهي الزمرة الأكثر شهرةً من زمر لي. ثمّ ناقشنا نظريّة التمثيل لهذه الزمرة، إضافةً إلى العلاقة بين نظريّة التمثيل لزمرة هايزنبرغ، ومؤثرات كميّة الحركة والموضع. وهذا ما يُبيّن لنا كيفية تحقيق الترابط بين زمرة هايزنبرغ والفيزياء.

ثمَ درسنا خصائص دوال هرميت، ودوال هرميت الخاصّة.

إنّ هذه الدوال هي دوال ذاتيّة لمؤثرات هرميت، ومؤثرات هرميت الخاصّة على التوالي.

يُطلق عادةً على مؤثر هرميت اسم الهزّاز التوافقي (Harmonic oscillation)، ويُطلق على مؤثر هرميت الخاص اسم مؤثر لابلاس الملتوي (twisted Laplacian).

ويرتبط كلٌ من هذين المؤثرَين بمؤثر لابلاس الجزئي على زمرة هايزنبرغ.

هذا وإنّ نظريّة مناشير هرميت، ومناشير هرميت الخاصّة ترتبط ارتباطاً وثيقاً بالتحليل التوافقي لزمرة هايزنبرغ $\mathbb{H}^n$، كما أنّها تلعب دوراً هامّاً في فهمنا للعديد من المسائل في $\mathbb{H}^n$.

الكلمات المفتاحيّة: زمرة هايزنبرغ، تمثيلات شرودنجر، تحويل فورييه_ ويغنر، دوال هرميت، دوال هرميت الخاصة.

المقدّمة:

يرتبط الإطار الرياضي لميكانيكا الكم Quantum Mechanics ارتباطاً وثيقاً بما يصفه علماء الرياضيات بنظريّة تمثيل الزمر. وفي بحثنا هذا سندرس هذه الفكرة ببعض التفصيل، ونعمل من خلال بعض الأنواع من الزمر، وذلك كنتيجةٍ للعلاقة الأساسيّة بين ميكانيكا الكم ونظرية التمثيل، والتي ببساطة تدور حول أنّه عندما يكون لدينا جملة كموميّة فيزيائيّة تؤثر عليها زمرة G، فإنّ فضاء الحالة لهذه الجملة سيكون كما التمثيل الواحدي للزمرة المؤثرة عليها. وهذا يعني أنّ نظرية التمثيل تُقدّم معلوماتٍ مهمّةً حول فضاءات الحالة الميكانيكية الكموميّة عندما تؤثر زمرة ما على هذه الجملة الفيزيائية. [4], [13], [16]

وبذلك تصبح الفيزياء بالنسبة لعلماء الرياضيات مصدراً مثمراً للغاية لدراسة التمثيلات الواحدية.

كانت بداية ظهور بنية زمر لي عندما لاحظ عالم الرياضيات Sophus Lie عام 1870 العلاقة الوثيقة بين هذا النوع من الزمر، وحلول بعض المعادلات التفاضليّة. ثمّ تمّت الملاحظة بأنّ المولّدات لزمر لي المؤثرة على فضاءاتٍ مناسبة، لها الصيغة نفسها التي تتميز بها الدوال الخاصّة.

ومن الأمثلة عن زمر لي عديمة القوى نجد زمرة هايزنبرغ، وإنّ موضوع دراستنا في هذا البحث هو أحد التطبيقات على زمرة هايزنبرغ وهي دوال هرميت ودوال هرميت الخاصة.

مشكلة البحث:

من خلال الدراسات التي تمَت على مؤثر هرميت الخاص الذي سنعرَفه خلال بحثنا تبيَن أنَه يرتبط ارتباطاً وثيقاً بمؤثر لابلاس هايزنبرغ.

يُعطى هزّاز هاملتون التوافقي الكمومي بالشكل: [12]

$$H = -\Delta + |x|^2$$

و هو مؤثر هرميت في $\mathbb{R}^n$. ويكون له التمثيل الآتي:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(A_j A_j^* + A_j^* A_j\right)$$

حيث A_j هي المؤثرات المولّدة (annihilation operators):

$$A_j = -\frac{d}{dx_j} + x_j \quad ; j = 1,2, \dots , n$$

و A_j^* هي مؤثرات العادم (creation operators):

$$A_j^* = \frac{d}{dx_j} + x_j \quad ; j = 1,2, \dots , n$$

هذا ويوجد مؤثر مُشابه على $\mathbb{C}^n$، يُعطى بالصيغة: [14]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(Z_j \overline{Z}_j + \overline{Z}_j Z_j\right)$$

حيث:

$$Z_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{1}{2}\overline{z}_j$$

$$\overline{Z_J} = -\frac{\partial}{\partial \overline{z_J}} + \frac{1}{2} z_j \quad ; j = 1,2, \dots , n$$

و إنّ $\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}$ و $\frac{\partial}{\partial z_j}$ تدلّ على المشتقات العقديّة: $\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}$ و $\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}$ على الترتيب، وذلك من أجل $z_j = x_j + iy_j$

و قد عُرف المؤثر $\mathcal{L}$ باسم المؤثر الهرميتي الخاص، وله الصيغة الصريحة:

$$\mathcal{L} = -\Delta_z + \frac{1}{4}|z|^2 - i\sum_{j=1}^{n}\left(x_j\frac{\partial}{\partial y_j} - y_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \qquad (1.1)$$

حيث Δ_z هو مؤثر لابلاس على $\mathbb{C}^n$.

ما يجعل هذا المؤثر مثيراً للاهتمام، هو أنّه مرتبط ببنية التلاف الأساسيّة على $\mathbb{C}^n$، والتي بموجبها تتمّ الحلول لمسائل القيمة الابتدائية للمعادلات التفاضليّة الخطيّة الأساسيّة، مثل التسخين والموجة. إنّ معادلة شرودنجر لـ $\mathcal{L}$ يمكن التعبير عنها من خلال بنية التلاف على $\mathbb{C}^n$. [12]

بفرض مسألة القيمة الابتدائية لمعادلة شرودنجر لأجل $\mathcal{L}$، معطاة بالشكل:

$$i\partial_t u(z,t) - \mathcal{L}u(z,t) = 0 \quad ; z \in \mathbb{C}^n, t > 0 \qquad (1.2)$$

$$u(z,0) = f(z) \qquad (1.3)$$

لأجل $f \in L^2(\mathbb{C}^n)$، فإنّ الحل لمسألة القيمة الابتدائية يُعطى بالشكل:

$$u(z,t) = e^{-it\mathcal{L}}f(z)$$

و باستخدام التمثيل المُعطى في العلاقة (3.1) لأجل $\mathcal{L}$، فإنّ معادلة شرودنجر لأجل $\mathcal{L}$ تأخذ الصيغة:

$$i\partial_t u + i\sum_{j=1}^{n}\left(x_j\partial_{y_j} - y_j\partial_{x_j}\right) u + \Delta_z u - \frac{1}{4}|z|^2 u = 0$$

قد يتمُّ اعتبار هذه المعادلة كنموذج ابتدائي لمعادلة شرودنجر المعمّمة من الشكل:

$$i\partial u = \left(-\Delta_x + V(x)\right)u = 0$$

حيث ∂ يرمز لمؤثرٍ تفاضليٍّ خطيٍّ من الرتبة الأولى على $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ من الشكل:

$$a_0(x)\partial_t + \sum_{j=1}^{m} a_j(x)\partial_{x_j} + b(x) \quad ; x \in \mathbb{R}^m, t \in \mathbb{R}$$

و في حالة معادلة شرودنجر لأجل مؤثر هرميت الخاص $\mathcal{L}$، سنجد أنّ التحليل يرتبط ارتباطاً وثيقاً بالتحليل التوافقي على زمرة هايزنبرغ.

و هذا ليس مستغرباً، وذلك لأنّ مؤثر هرميت الخاص يرتبط ارتباطاً وثيقاً بمؤثر لابلاس هايزنبرغ.

مواد البحث وطرائقه:

اعتمدت الدراسة منهجاً يقوم على إعادة صياغة التعاريف الأساسية للعديد من المفاهيم الرياضيّة اعتماداً على زمرة هايزنبرغ، وذلك من خلال تمثيلات شرودنجر لهذه الزمرة، الأمر الذي يوسّع الآفاق لحل العديد من المسائل في التحليل الرياضي باستخدام أنواعٍ من الزمر. ومن أهم أدوات هذا البحث الربط بين الفيزياء وميكانيكا الكم وزمرة

هايزنبرغ ما يعطينا مصدراً مثمراً للغاية لدراسة التمثيلات الواحدية والوصول إلى الغايات المرجوّة والمراجع والوثائق اللازمة.

تعريف (1): [1] ,[4] ,[9] إنّ زمرة هايزنبرغ هي زمرة من الانسحابات للنصف العلوي لفضاء سيجل في الفضاء $\mathbb{C}^{n+1}$(the Siegel upper half space)، ويعرّف عليها قانون التشكيل بالعلاقة:

$$(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{t})(u,v,s)=\left(x+u,y+v,t+s+\frac{1}{2}(u.y-v.x)\right)$$

ويُرمز لهذه الزمرة بالرمز $\mathbb{H}^n$.

كما يتحقق أن $\mathbb{H}^n=\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}$ وفق قانون تشكيلٍ مكافئ للقانون السابق يُعطى بالعلاقة:

$$(z,t)(w,s)=\left(z+w,t+s+\frac{1}{2}Im(z.\overline{w})\right)$$

تعريف (2): التمثيل (Representation): [8] ,[5] ,[2]

التمثيل π للزمرة G هو تشاكل من الزمرة G إلى الزمرة $GL(V)$ (زمرة المؤثرات الخطيّة القابلة للعكس على V)، حيث V هو فضاء متجهي عقدي غير صفري، نعتبره كفضاء تمثيل لـ π.

تعريف (3): التمثيل الواحدي (Unitary representation): [17] ,[2]

ندعو التمثيل π تمثيلاً واحدياً إذا تحقق أنّه لأجل كل $g\in G$ فإنّ المؤثر $\pi(g)$ واحدي على V، أي إذا تحققت العلاقة:

$$\langle\pi(g)(v),\pi(g)(w)\rangle=\langle v,w\rangle$$

لأجل كل $g\in G$ و $v,w\in V$.

تعريف (4): [13] ,[4]

يُطلق على الفضاء الجزئي المغلق $W\subset V$ بأنّه فضاء لا متغيّر بالنسبة لـ π إذا تحققت العلاقة:

$$\pi(g)W\subset W$$

لأجل كل $g\in G$.

تعريف (5): التمثيل غير القابل للاختزال: [2]

يُطلق على التمثيل π إنّه غير قابل للاختزال إذا لم يتواجد أي فضاء جزئي لا متغيّر بالنسبة لـ π ومغلق تماماً، أي أن يكون الفضاء الجزئي اللا متغير والمغلق الوحيد هو فقط O إضافة إلى الفضاء V نفسه.

تعريف (6): [16] ,[2] , [1]

لتكن $\mathbb{H}^n=\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}$ زمرة هايزنبرغ المزودّة بقانون التشكيل الآتي:

$$(z,t).(w,s)=\left(z+w,t+s+\frac{1}{2}Im(z.\overline{w})\right)$$

إن جبر لي الموافق $\mathfrak{h}_n$ يوّلد بـ $(2n+1)$ حقل متجه معطاة بالشكل:

$$X_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{2} y_j \frac{\partial}{\partial t}\right) \qquad ; \quad j = 1,2, \dots , n$$

$$Y_j = \left(\frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2} x_j \frac{\partial}{\partial t}\right) \qquad ; \quad j = 1,2, \dots , n$$

$$T = i\, \frac{\partial}{\partial t} \quad ; \quad i = \sqrt{-1}$$

لذلك يسمّى المؤثر $\mathcal{L}$ المعرّف بالشكل:

$$\mathcal{L} = -\sum_{j=1}^{n} \left(X_j^2 + Y_j^2\right)$$

مؤثر لابلاس الجزئي (أو اللابلاسي الجزئي) أو لابلاسي هايزنبرغ.

لنأخذ التمثيل اللانهائي(the infinite representations) الذي يتم بواسطة الأعداد الحقيقيّة $\lambda \neq 0$ كما يلي:

$$\pi_\lambda(z,t)\varphi(\xi) = e^{i\lambda t} e^{i\lambda\left(x.\xi + \frac{1}{2}x.y\right)} \varphi(\xi + y)$$

و ذلك من أجل كل $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^n)$. وهنا يكون:

$$\pi_\lambda(z,t)\pi_\lambda(w,s) = \pi_\lambda\big((z,t).(w,s)\big)$$

كما أن $\pi_\lambda(z,t)$ مؤثر واحدي على $L_2(\mathbb{R}^n)$. وبعبارة أخرى إنّ $\pi_\lambda(z,t)$ هو تمثيل واحدي للزمرة $\mathbb{H}^n$ على $L_2(\mathbb{R}^n)$.

تعريف (7): تحويل فوربيه_ ويغنر (Fourier_ Wigner Transform): [16]

بفرض $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$، نعرّف الدالّة:

$$V_\varphi(\psi, z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\pi(z)\varphi, \psi) \qquad (1.9)$$

و التي تسمّى تحويل فوربيه_ ويغنر لـ φ و ψ.

تعريف (8): [7], [11]

نُعرّف التلاف (convolution) $f * g$ لدالتين f, g مُعرفتين على $\mathbb{H}^n$ بالعلاقة:

$$(f * g)(z,t) = \int_{\mathbb{H}^n} f\big((z,t)(-w,-s)\big) g(w,s)\, dw ds \qquad (2.2)$$

حيث $(z,t) \in \mathbb{H}^n$. وذلك عندما يكون التكامل موجوداً.

تعريف (9): [7], [10], [11]

لنضع: $\pi_\lambda(z,t) = e^{i\lambda t} \pi_\lambda(z)$

حيث: $\pi_\lambda(z) = \pi_\lambda(z, 0)$

و لنُعرّف:

$$f^\lambda(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(z,t)\, dt \qquad (2.1)$$

بأنّه تحويل فوربيه العكسي لـ f بالمتغير t.

و بالتالي تنتج العلاقة:

$$\hat{f}(\lambda)\varphi = \int_{\mathbb{C}^n} f^{\lambda}(z)\pi_{\lambda}(z)\varphi dz \qquad (2.2) \qquad [7]$$

و بالتالي يمكننا تشكيل مؤثرات بالشكل:

$$W_{\lambda}(g) = \int_{\mathbb{C}^n} g(z)\pi_{\lambda}(z)dz \qquad (2.3) \qquad [7,11]$$

لدوال مُعرّفة على $\mathbb{C}^n$.

و عندما $\lambda = 1$، فإنّنا ندعو هذه المؤثرات تحويل وايل (Weyl transform) ونرمز له بالرمز $W(g)$.

و نكتب أيضاً $\pi(z)$ بدلاً من $\pi_1(z)$.

و بالتالي نحصل على العلاقة:

$$W(g)\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{C}^n} g(z)\pi(z)\varphi(\xi)dz \qquad (2.4)$$

تعريف (10): [7, 11]

من تعريف التلاف، وبحسابٍ بسيطٍ نجد:

$$(G * f)^{\lambda}(z) = \int_{\mathbb{C}^n} G^{\lambda}(z-w)f^{\lambda}(w)e^{\frac{i}{2}\lambda\, Im(z.\overline{w})}dz$$

و بالتالي يصبح بالإمكان وضع صيغة التلاف بالشكل:

$$(g *_{\lambda} h)(z) = \int_{\mathbb{C}^n} g(z-w)h(w)e^{\frac{i}{2}\lambda\, Im(z.\overline{w})}dw \qquad (2.5)$$

و هذا ما يسمّى λ_ تلافات ملتوية (λ_ twisted convolutions).

و عندما $\lambda = 1$، ندعوها بتلافاتٍ ملتوية، ونرمز لها بالرمز $g \times h$.

و بالتالي:

$$(g \times h)(z) = \int_{\mathbb{C}^n} g(z-w)h(w)e^{\frac{i}{2} Im(z.\overline{w})}dw$$

النتائج:

إنَ دراستنا لدوال هرميت ودوال هرميت الخاصة بالاعتماد على زمرة هايزنبرغ أوصلتنا إلى العلاقة الأساسية للتعامد لدوال هرميت الخاصة، وكذلك تمَ التعبير عن دوال هرميت الخاصة بالاعتماد على دوال لاجير وتوصلنا إلى العديد من العلاقات المهمَة. كما توصلنا إلى العلاقة الأساسية بين مؤثرات هرميت الخاصة ومؤثرات هرميت.

المناقشة:

1.1. دوال هرميت: [12, 16]

لنبدأ بتعريف كثيرات حدود هرميت، لأجل $t \in \mathbb{R}$ و $k = 0,1,2, \ldots \ldots$، نُعرّف كثيرة حدود هرميت $H_k(t)$ بالمعادلة:

$$H_k(t) = (-1)^k e^{t^2} \frac{d^k}{dt^k}\{e^{-t^2}\} \qquad (3.1)$$

عندئذٍ فإنّ دوال هرميت المنظمة تُعرّف بالشكل:

$$h_k(t) = \left(2^k \sqrt{\pi} k!\right)^{-\frac{1}{2}} H_k(t) e^{-\frac{1}{2}t^2} \tag{3.2}$$

إنّ هذه الدوال تُشكّل قاعدة متعامدة منظمة في الفضاء $L^2(\mathbb{R})$.

يُرمز لدوال هرميت ذات الأبعاد العليا بالرمز Φ_α، ويتم الحصول عليها بأخذ جداءات تنسوريّة. وبالتالي لأجل أي دليل متعدّد $\alpha = \left(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\right)$ ولأجل $x \in \mathbb{R}^n$، فإنّنا نُعرّف:

$$\Phi_\alpha(x) = \prod_{j=1}^{n} h_{\alpha_j}\left(x_j\right) \quad ; x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \tag{3.3}$$

و عندئذٍ تكون $\{\Phi_\alpha\}$ قاعدة متعامدة للفضاء $L^2(\mathbb{R}^n)$. وهي دوال ذاتيّة لمؤثر هرميت موافقة للقيم الذاتيّة $(2|\alpha| + n)$: [14]

$$\mathrm{H} = -\Delta + |x|^2$$

حيث يكون: $\mathrm{H}\Phi_\alpha = (2|\alpha| + n)\Phi_\alpha; \ |\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$

و هي أيضاً دوال ذاتيّة لتحويل فورييه $\mathcal{F}$ موافقة للقيم الذاتيّة $(-i)^{|\alpha|}$:

$$\mathcal{F}\Phi_\alpha = (-i)^{|\alpha|}\Phi_\alpha$$

و لهذه الحقائق دورٌ مهم في العديد من المسائل في تحليل فورييه، فعلى سبيل المثال استُخدمت هذه العلاقات في تطوير مبرهنة بلانشريل، وكذلك استُخدمت في الحصول على الثابت الأفضل لمتباينة هاوسدورف_ يونغ.

1.2. دوال هرميت الخاصّة:

لأجل كل $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$، و$z \in \mathbb{C}^n$ نُعرّف دوال هرميت الخاصّة بالشكل:

$$\Phi_{\alpha,\beta}(z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi} \Phi_\alpha\left(\xi + \frac{y}{2}\right) \Phi_\beta\left(\xi - \frac{y}{2}\right) d\xi \tag{3.4}$$

و بالتالي نجد أنّ $\Phi_{\alpha,\beta}(z)$ هي تحويلات فورييه_ ويغنر لدوال هرميت Φ_βو Φ_α، أي إنّ:

$$\Phi_{\alpha,\beta}(z) = V\left(\Phi_\alpha, \Phi_\beta\right)(z)$$

مبرهنة (1) :

إنّ دوال هرميت الخاصّة تُشكّل قاعدةً متعامدةً تامّةً للفضاء $L^2(\mathbb{C}^n)$.

الإثبات:

إنّ التعامد هو نتيجة واضحة لخصائص تحويل فورييه_ ويغنر.

لنثبت الآن التمام:

لنفرض أنّ $f \in L^2(\mathbb{C}^n)$ معامدة لكل الدوال $\Phi_{\alpha,\beta}$.

و اعتماداً على تعريف $\Phi_{\alpha,\beta}$ نحصل على العلاقات الآتية:

$$\int_{\mathbb{C}^n} \bar{f}(z)\left(\pi(z)\Phi_\alpha, \Phi_\beta\right) dz = \left(W\left(\bar{f}\right)\Phi_\alpha, \Phi_\beta\right) = 0$$

و بما أنّ $\{\Phi_\alpha\}$ تامّة في $L^2(\mathbb{R}^n)$، فإنّه يكون:

$$W\left(\bar{f}\right) = 0$$

ممّا يعني أنّ $f = 0$، وهذا ما يشير ضمناً لمبرهنة بلانشريل لتحويل فورييه.

1.3. منشور هرميت الخاص:

لدينا من العلاقة:

$$\Phi_\alpha(x)=\prod_{j=1}^{n}h_{\alpha_j}(x_j)\quad ;x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

وبحسابٍ مباشر، وباستخدام العلاقات:

$$\left(-\frac{d}{dx}+x\right)\Phi_k(x)=(2k+2)^{\frac{1}{2}}\Phi_{k+1}(x)$$
$$\left(\frac{d}{dx}+x\right)\Phi_k(x)=(2k)^{\frac{1}{2}}\Phi_{k-1}(x)$$

المحققة من أجل دوال هرميت Φ_k، تظهر لنا العلاقة:

$$\mathcal{L}\Phi_{\alpha,\beta}=(2|\beta|+n)\Phi_{\alpha,\beta}$$

حيث $;\beta=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ $|\beta|=\sum_{j=1}^{n}\beta_j$ التي تعني أنّ $\Phi_{\alpha,\beta}$ هي دوال ذاتية لـ $\mathcal{L}$ توافق القيمة الذاتية $2|\beta|+n$، وكما وجدنا فهي تشكّل أيضاً جملةً متعامدةً في $L^2(\mathbb{C}^n)$.

وهكذا من أجل كل $f\in L^2(\mathbb{C}^n)$، فإنّه يصُّح النشر:

$$f=\sum_{\alpha}\sum_{\beta}(f,\Phi_{\alpha,\beta})\Phi_{\alpha,\beta}\qquad(3.5)$$

ندعو النشر السابق بمنشور هرميت الخاص.

ويمكن أن تتمّ كتابة هذا النشر بالشكل:

$$f=\sum_{k=0}^{\infty}P_kf\qquad(3.6)$$

حيث:

$$P_kf=\sum_{\alpha,|\beta|=k}(f,\Phi_{\alpha,\beta})\Phi_{\alpha,\beta}\qquad(3.7)$$

وهو مسقط f على الفضاء الذاتي الموّلد بالمجموعة $\left\{\Phi_{\alpha,\beta};\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n,|\beta|=k\right\}$.

1.4. خصائص التعامد لدوال هرميت الخاصّة: $[14,15]$

لدينا العلاقة:

$$\Phi_{\alpha,\beta}\times\Phi_{\mu,\gamma}=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta_{\beta,\mu}\Phi_{\alpha,\gamma}\qquad(3.8)$$

حيث:

$$\delta_{\beta,\mu}=\begin{cases}1 & ;\beta=\mu\\ 0 & ;\text{غير ذلك}\end{cases}$$

لنثبت صحّة هذه العلاقة:

لتكن $\varphi,\psi\in L^2(\mathbb{R}^n)$، عندئذٍ ينتج من خصائص تحويل فورييه_ ويغنر:

$$\left(W(\overline{\Phi_{\alpha,\beta}})\varphi,\psi\right)=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(V_\varphi(\psi),\Phi_{\alpha,\beta}\right)=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(V_\varphi(\psi),V(\Phi_\alpha,\Phi_\beta)\right)$$

و لدينا العلاقة الآتية محققة :

$$\left(V_{\varphi}(\psi), V\left(\Phi_{\alpha}, \Phi_{\beta}\right)\right) = (\varphi, \Phi_{\alpha})\left(\Phi_{\beta}, \psi\right)$$
$$\Rightarrow \left(W\left(\overline{\Phi_{\alpha,\beta}}\right)\varphi, \psi\right) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}(\varphi, \Phi_{\alpha})\left(\Phi_{\beta}, \psi\right)$$

و بالتالي تتحقق العلاقة:

$$\left(W\left(\overline{\Phi_{\alpha,\beta}} \times \overline{\Phi_{\mu,\gamma}}\right)\varphi, \psi\right) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(W\left(\overline{\Phi_{\mu,\gamma}}\right)\varphi, \Phi_{\alpha}\right)\left(\Phi_{\beta}, \psi\right)$$

و ممّا سبق فإنّ:

$$\left(W\left(\overline{\Phi_{\mu,\gamma}}\right)\varphi, \Phi_{\alpha}\right) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\varphi, \Phi_{\mu}\right)\left(\Phi_{\gamma}, \Phi_{\alpha}\right)$$
$$\Rightarrow \left(W\left(\overline{\Phi_{\alpha,\beta}} \times \overline{\Phi_{\mu,\gamma}}\right)\varphi, \psi\right) = (2\pi)^{n}\left(\varphi, \Phi_{\mu}\right)\left(\Phi_{\gamma}, \Phi_{\alpha}\right)\left(\Phi_{\beta}, \psi\right)$$

و بما أنّ العلاقة الآتية محققة:

$$\left(W\left(\overline{\Phi_{\alpha,\beta}} \times \overline{\Phi_{\mu,\gamma}}\right)\varphi, \psi\right) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(V_{\varphi}(\psi), \Phi_{\alpha,\beta} \times \Phi_{\mu,\gamma}\right)$$

عندئذٍ فإنّنا نحصل على العلاقة:

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(V_{\varphi}(\psi), \Phi_{\alpha,\beta} \times \Phi_{\mu,\gamma}\right) = (2\pi)^{n}\left(\varphi, \Phi_{\mu}\right)\left(\Phi_{\gamma}, \Phi_{\alpha}\right)\left(\Phi_{\beta}, \psi\right)$$

فإنّه يكون:

$$\left(V_{\varphi}(\psi), V\left(\Phi_{\mu}, \Phi_{\beta}\right)\right) = \left(\varphi, \Phi_{\mu}\right)\left(\Phi_{\beta}, \psi\right)$$

و بالتالي:

$$\left(V_{\varphi}(\psi), \Phi_{\alpha,\beta} \times \Phi_{\mu,\gamma}\right) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(V_{\varphi}(\psi), V\left(\Phi_{\mu}, \Phi_{\beta}\right)\right)\left(\Phi_{\gamma}, \Phi_{\alpha}\right)$$

عندئذٍ فإنّنا نحصل على الصيغة الهامّة الآتية:

$$\overline{\Phi_{\alpha,\beta}} \times \overline{\Phi_{\mu,\gamma}} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta_{\gamma,\alpha}\overline{\Phi_{\mu,\beta}}$$

و بما أنّ $\overline{f \times g} = \bar{g} \times \bar{f}$، فإنّنا نحصل على العلاقة:

$$\Phi_{\alpha,\beta} \times \Phi_{\mu,\gamma} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta_{\beta,\mu}\Phi_{\alpha,\gamma}$$

ـ يمكننا التعبير عن دوال هرميت الخاصّة بالاعتماد على مفهوم دوال لاجير.

لدينا الصيغة:[12,16]

$$\Phi_{\alpha,\alpha}(z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\prod_{j=1}^{n} L_{\alpha_j}\left(\frac{1}{2}\left|z_j\right|^2\right)e^{-\frac{1}{4}\left|z_j\right|^2} \qquad (3.9)$$

حيث $L_k(t)$ هي كثيرة حدود لاجير من المرتبة 0.

تجدر الإشارة إلى أنّ كثيرة حدود لاجير من المرتبة $\alpha > -1$ والدرجة k، تُعرّف بالعلاقة:

$$L_k^{\alpha}(t)e^{-t}t^{\alpha} = \frac{1}{k!}\left(\frac{d}{dt}\right)^k\left(e^{-t}t^{k+\alpha}\right) \qquad (3.10)$$

حيث إنّ:

$$L_{\mu}^{m}(z)=\prod_{j=1}^{n} L_{\mu_j}^{m_j}\left(\frac{1}{2}\left|z_j\right|^2\right) \qquad (3.11)$$

مبرهنة (2) : [16]

إنّ العلاقتين الآتيتَين محققتين:

$$\Phi_{\mu+m,\mu}=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{\mu!}{(\mu+m)!}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{|m|}\bar{z}^{m}L_{\mu}^{m}(z)e^{-\frac{1}{4}|z|^2}$$

$$\Phi_{\mu,\mu+m}=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{\mu!}{(\mu+m)!}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)^{|m|}z^{m}L_{\mu}^{m}(z)e^{-\frac{1}{4}|z|^2}$$

ـ الآن اعتماداً على ما سبق فإنّه يمكننا كتابة منشور هرميت الخاص على النحو الآتي:

لتكن: $\varphi_k(z)=L_k^{n-1}\left(\frac{1}{2}|z|^2\right)e^{-\frac{1}{4}|z|^2}$

هي دالّة لاجير من المرتبة $n-1$.

حيث L_k^{α} ترمز لكثيرة حدود لاجير من الدرجة k، والمرتبة $\alpha>-1$، والمعرّفة اعتماداً على الدالّة الموّلدة بالشكل:

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k^{\alpha}(x)w^k=(1-w)^{-\alpha-1}e^{-\frac{w}{1-w}x} \quad ;|w|<1 \qquad (3.12)$$

و إنّ دوال هرميت الخاصّة $\Phi_{\alpha,\beta}$ ترتبط بدوال لاجير φ_k بالعلاقة: [15]

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sum_{|\beta|=k}\Phi_{\beta,\beta}(z)=\varphi_k \qquad (3.13)$$

إنّ الشرط (3.8) يؤدي إلى تعامد دوال لاجير، أي إنّه تتحقق العلاقة:

$$\varphi_k\times\varphi_j=(2\pi)^n\varphi_k\delta_{kj} \qquad (3.14)$$

و سنوّضح حصولنا على هذه العلاقة لاحقاً.

و من الصيغة (3.12) مع $\alpha=n-1$، نجد أنّ الدوال φ_k تحقق متطابقة الدالّة الموّلدة:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(z)w^k=(1-w)^{-n}\,e^{-\frac{1}{2}\frac{1+w}{1-w}|z|^2} \quad ;|w|<1 \qquad (3.15)$$

و التي نجد من خلال التمديد التحليلي أنّها صالحة لأجل أيّ عددٍ مركب w بحيث $|w|<1$.

الآن من تعريف التلاف الملتوي لأجل دالتين f,g على $\mathbb{C}^n$:

$$(f\times g)(z)=\int_{\mathbb{C}^n}f(z-w)g(w)e^{\frac{i}{2}Im(z.\bar{w})}dw$$

نجد أنّه بأخذ التلاف الملتوي على طرفي العلاقة (3.4) مع $\Phi_{\alpha,\alpha}$، وباستخدام خاصّة التعامد (3.8) نحصل على العلاقة:

$$f\times\Phi_{\alpha,\alpha}=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sum_{\mu}(f,\Phi_{\mu,\alpha})\Phi_{\mu,\alpha}$$

و الآن بأخذ المجموع بالنسبة لـ α لكلا الطرفين، حيث $|\alpha| = k$، وباستخدام العلاقة (3.13) نجد أنّ المسقط P_k المعطى بالعلاقة (3.7) له تمثيل أبسط بالشكل:

$$P_k f = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{|\alpha|=k} f \times \Phi_{\alpha,\alpha}(z)$$
$$= (2\pi)^{-n} f \times \varphi_k(z) \qquad (3.16)$$

و بأخذ العلاقة (3.6) بعين الاعتبار فإنّ نشر هرميت الخاص يأخذ الصيغة الآتية:

$$f(z) = (2\pi)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} f \times \varphi_k(z) \qquad (3.17)$$

ـ من العلاقة (3.8) تنتج لدينا العلاقة الآتيّة:

$$W(\Phi_{\alpha,\alpha})\varphi = (2\pi)^{\frac{n}{2}}(\varphi, \Phi_\alpha)\Phi_\alpha$$

و بالتالي لدينا:

$$W(\varphi_k)\varphi = (2\pi)^n \sum_{|\alpha|=k} (\varphi, \Phi_\alpha)\Phi_\alpha = (2\pi)^n P_k \varphi \qquad (3.18)$$

حيث P_k هو المسقط من $L^2(\mathbb{R}^n)$ على الفضاء الذاتي الموافق للقيمة k المولّد بالمجموعة: $\{\Phi_\alpha : |\alpha| = k\}$.

و بالتالي نحصل على العلاقة الهامّة:

$$W(\varphi_k) = (2\pi)^n P_k$$

و اعتماداً على هذه العلاقة تمّ التوصل إلى العلاقة الآتية: [16]

$$\varphi_k \times \varphi_j = (2\pi)^n \varphi_k \delta_{kj} \qquad (3.19)$$

كما تمّ التوصل للعلاقة الهامّة الآتية: [16]

$$W(\mathcal{L}f) = (2\pi)^n W(f)\mathrm{H}$$

حيث $\mathcal{L}$ وH هي مؤثر هرميت الخاصّ ومؤثر هرميت على الترتيب.

الخلاصة:

وبذلك نكون قد اعتمدنا على نوع من أنواع الزمر وهو زمرة هايزنبرغ في دراستنا للدوال الخاصة. حيث استخدمنا نوع من التمثيلات الواحدية غير القابلة للاختزال لهذه الزمرة، وهي تمثيلات شرودنجر التي تلعب دوراً أساسيّاً في توضيح دور زمرة هايزنبرغ في التحليل التوافقي.

التوصيات:

يمكننا دراسة الكثير من الموضوعات اعتماداً على ما توصلنا إليه في بحثنا هذا، وصولاً إلى التوسع في دوال لاجير وتوضيح الطيف النقطي المتقطع للمؤثر $\mathcal{L}$ ودواله الذاتية، والكثير من الدراسات الجديدة والمفيدة.

المراجع:

1. سهى سلامة.: " دراسة في زمر لي وأهم الأمثلة عنها (زمرة هايزنبرغ) ". المجلة العربية للعلوم ونشر الأبحاث، 10.26389/AJSRP.S191019، (2020).

2. سهى سلامة.: "دور زمرة هايزنبرغ في التحليل التوافقي". المجلة العربية للعلوم ونشر الأبحاث، 10.26389/AJSRP.S010719، (2019).
3. Casselman, B.: "Continuous representations". University of British Columbia, (2019).
4. Celebi, R., Hendricks, K. and Jordan, M.: "The Heisenberg group and uncertainty principle in Mathematical physics". Research program under the supervision of Dr. Hadi Salamasian, university of Ottawa, (2015).
5. Fischer, V. and Ruzhansky, M.: "Quantization on nilpotent Lie groups". Progress in Mathematics, (2015).
6. Geller, D.: "Spherical harmonics, the Weyl transform and the Fourier transform on the Heisenberg group". Canad. J. Math. 36 (1984), no. 4, 615_ 684.
7. Ghosh, S. and Srivastava, R.K.: "Heisenberg uniqueness pairs for the Fourier transform on the Heisenberg group". Guwahati, India, (2018).
8. Kisil, V.: "The Heisenberg group in Mathematics and physics". University of Leeds, England, Varna, (2016).
9. Krantz, S.: "Explorations in Harmonic Analysis with applications to complex function theory and the Heisenberg group". Birkhäuser, Boston, (2009).
10. Kunze, R.:" L^p Fourier transforms on locally compact unimodular groups". Trans. Amer. Math. Soc., 89 (1958), 519_ 540.
11. Lakshmi Lavanya, R. and Thangavelu, S.: "A characterization of the Fourier transform on the Heisenberg group". Ann. Funct. Anal. 3, no. 1, 109_ 120, (2012).
12. Rantnakumar, P.K.: "On Schrödinger propagator for the special Hermite operator". J Fourier Anal Appl 14: 286_ 300, Boston, (2008).
13. Rottensteiner, D.: "Foundations of Harmonic analysis on the Heisenberg group". Progress for obtaining the academic degree: Master of science, University of Vienna, (2010).
14. Strichartz, R.S.: "Harmonic analysis as spectral theory of laplacians". J. Funct. Anal. 87, 51_ 148 (1989).
15. Thangavelu, S.: "Lectures on Hermite and Laguerre expansions". Mathematical notes, vol. 42. Princeton university press, Princeton (1993).
16. Thangavelu, S.: "Harmonic analysis on the Heisenberg group". Progress in Mathematics 159, Birkhäuser, Boston, MA, (1998).
17. Woit, P.: "Quantum theory, groups and representations: An introduction (final draft version)". Columbia university, (2017).