

## Approximation Solution For Nonlinear Poisson Equation By Finite Element\_Homotopy Method

Hiba Zakaria Aslan

Habib Solaiman Ali

Faculty of Science || Albaath University || Homs || Syria

Berlant Sabri Mattit

Faculty-Damascus University || Damascus || Syria

**Abstract:** The main aim to this research is to find the approximation solution of the nonlinear Poisson equation by combining the finite element method FEM with homotopy analysis method HAM in a single approximation method because the finite element method needs when applied to nonlinear partial differential equations either for iterative methods such as (Newton\_Gauss Method<sup>14</sup>, Picard's iterative method<sup>3</sup>, Newton\_Galarkin Method<sup>4</sup>) or for other approximation methods such as (B\_Splain<sup>24</sup>, Homotopy Analysis<sup>6</sup>).

In this article, the finite element method was combined with the Homotopy analysis method with one method called Homotopy\_Finite Element Method FE\_HM, to convert the nonlinear matter into a linear matter through the HAM method, and to overcome the engineering complexity of the region by a grid of finite elements through the FEM method, We obtained good results when applying this method to the nonlinear Poisson equation on Dirichlet boundary condition, and this method was programmed through the Matlab program.

**Keywords:** nonlinear Poisson equation, weight function, stiffness matrix, shape functions, Deformation equation.

## الحل التقريبي لمعادلة بواسون غير الخطية بطريقة هوموتوبي\_العناصر المنتهية FE\_HM

هبة زكريا أصلان

حبيب سليمان علي

كلية العلوم || جامعة البعث || حمص || سوريا

برلنت صبري مطيط

كلية العلوم || جامعة دمشق || دمشق || سوريا

الملخص: إنَّ الهدف الرئيسي من هذا البحث هو إيجاد الحل التقريبي لمعادلة بواسون غير الخطية وذلك بدمج طريقة العناصر المنتهية FEM مع طريقة تحليل الهوموتوبي HAM بطريقة تقريبية واحدة، وذلك لأن طريقة العناصر المنتهية تحتاج عند تطبيقها على معادلات تفاضلية جزئية غير خطية إما لطرائق تكرارية مثل ( طريقة نيوتن\_غاوس<sup>14</sup>، طريقة بيكاردي التكرارية<sup>3</sup>، طريقة نيوتن\_كالاركين<sup>4</sup>) أو لطرائق تقريبية أخرى مثل ( ب\_سبلان<sup>24</sup>، تحليل الهوموتوبي<sup>6</sup>....).

وفي مقالتنا هذه تم دمج طريقة العناصر المنتهية مع طريقة تحليل الهوموتوبي بطريقة واحدة اسمها طريقة هوموتوبي\_العناصر المنتهية FE\_HM، وذلك لتحويل المسألة غير الخطية إلى مسألة خطية من خلال طريقة HAM، وللتغلب على التعقيد الهندسي للمنطقة عن طريق شبكة من العناصر المنتهية من خلال طريقة FEM، وقد حصلنا على نتائج جيدة عند تطبيق هذه الطريقة على معادلة بواسون غير الخطية بشروط ديرخلية الحدية، وقد تم برمجة هذه الطريقة من خلال برنامج الماتلاب.

## المقدمة:

تعود طريقة HAM إلى الرياضي الصيني Shijun Liao حيث قدمها في عام 1992 وقد كانت هذه الطريقة جزءاً من رسالة الدكتوراه لهذا العالم، وقد تم تعديلها فيما بعد لتحتوي الوسيط  $h$ ، ومن الجدير بالذكر أن هذا الباحث كان له دور بارز في هذه الطريقة حيث عرض طريقته مع المبادئ الأساسية المتعلقة بها، إضافة إلى تطبيقها على عدة مسائل ذات أهمية في المجالات الهندسية والفيزياء<sup>[15,16,18]</sup>.

لقد أدرك الباحثون أهمية هذه الطريقة، وقدرتها على التعامل مع العديد من المسائل التي تتضمن معادلات تفاضلية، معادلات تكاملية، لذا فقد اهتموا بدراستها وتطبيقها على معادلات غير خطية، حيث إن هذه الطريقة تمتاز بقدرتها على تحويل المعادلات غير الخطية إلى معادلات خطية سهلة الحل وذلك بالاستفادة من مفهوم الهوموتوبي (تشوه دالة مستمرة إلى دالة أخرى)، في التبولوجيا والهندسة التفاضلية، حيث تكمن أهمية طريقة HAM في قدرتها على استخدام الهوموتوبي، وتوظيفه في حل أصعب المسائل.

ففي عام 2006 استخدمت طريقة HAM لحل معادلات تفاضلية غير خطية في مجال الحرارة<sup>[1]</sup>، وفي عام 2010 تم تطبيق هذه الطريقة لحل معادلات تفاضلية ومعادلات تكاملية<sup>[25]</sup>، وفي عام 2013 كان لهذه الطريقة دور في حل معادلة التلغراف<sup>[21]</sup>، وفي عام 2015 استخدمت طريقة HAM لحساب القيم الذاتية لمسائل Sturm-Liouville<sup>[12]</sup>، بينما ساهمت هذه الطريقة في عام 2016 في حل مسألة Bratu<sup>[10]</sup>.

تعود طريقة العناصر المنتهية لعام 1909، عندما طوّر ريتز Ritz طرائق الحل التقريبي لمسائل في ميكانيكا المواد الصلبة المشوهة، في عام 1943 زاد Richard Courant (1888-1972) من إمكانيات طريقة ريتز عن طريق إدخال دوال خطية خاصة معرفة على مناطق مثلثية، وطبق هذه الطريقة في مسائل الفتل.

قُدمت طريقة العناصر المنتهية من قبل المهندسين في أواخر الخمسينيات وبداية ستينيات القرن العشرين، وذلك لإيجاد الحل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية في الهندسة الهيكلية، ثم بدأت الرياضيات بدراسة طريقة العناصر المنتهية في منتصف الستينيات وسرعان ما أصبحت هذه الطريقة هي تقنية عامة للحل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية، ففي عام 1985 أدخل مفهوم العناصر المنتهية إلى الديناميكا المغناطيسية<sup>[9]</sup>، وفي عام 1986 استخدمت في الميكانيكا الحرارية<sup>[11]</sup>، وفي عام 1987 أصبحت مفهوماً مفيداً في المجالات الكهربائية والمغناطيسية<sup>[22]</sup>، وتطورت طريقة العناصر المنتهية مع تقدم العلم والتكنولوجيا حتى تم استخدامها عام 1999 في بصريات الجسيمات المشحونة<sup>[13]</sup>، وأدخلت إلى المجالات الهندسية المختلفة ففي عام 2001 بدأت الهندسة الكيميائية بتطبيق طريقة العناصر في مختلف فروعها<sup>[7]</sup>، وفي عام 2003 طبقت هذه الطريقة في مجالات الكهرومغناطيسية<sup>[19,23]</sup>، وسرعان ما أصبحت طريقة العناصر المنتهية طريقة أساسية في مناهج طلاب الهندسة في عام 2005<sup>[2]</sup>، وحتى المجالات الطبية أخذت هذه الطريقة واستعملتها في مختلف اختصاصاتها، ففي عام 2006 طبقت على معادلات تدفق الدم<sup>[5]</sup>، وفي عام 2007 بدأ طب الأسنان في استخدام هذه الطريقة في زرع الأسنان<sup>[8]</sup>، وفي عام 2012 كان لهذه الطريقة دور فعال في تكنولوجيا النانو<sup>[20]</sup>، وفي عام 2013 ساهمت هذه الطريقة في عمليات تصنيع الآلات<sup>[17]</sup>، وعلى الرغم من أن طريقة العناصر المنتهية احتلت مكانة عالية في التحليل العددي وإيجاد الحلول التقريبية إلا أنها ظلت مستمرة وفعالة في هذا الاختصاص إلى يومنا هذا.

مشكلة البحث:

تكمن الصعوبة في إيجاد لحل التقريبي في هذه الطريقة كلما زاد التعقيد الهندسي للمنطقة المعطاة وكلما زاد عدد العناصر (مثلثات أو مستطيلات) الناتجة عن تقسيم المنطقة، وبالرغم من فعالية النتائج العددية لهذه الطريقة، إلا أن الخطوات تأخذ كثيراً من الوقت وتزداد صعوبة كلما كانت الشروط الحدية معقدة أكثر ومطبقة على عدد أكبر من حواف المنطقة المعطاة، وكلما زاد عدد الثوابت غير المعدومة في الصيغة العامة المعادلة التفاضلية الجزئية.

مواد البحث وطرائقه:

نبدأ أولاً بطريقة العناصر المنتهية، ولنعرّف  $V_h$  فضاء العناصر المنتهية، ولتكن  $\Omega = (a,b) \times (c,d)$  المنطقة المعطاة في نص المسألة، ثم نرسم شبكة  $T_h$  من المستطيلات أو المثلثات  $K$ ، بحيث  $\Omega = \bigcup_{K \in T_h} K$ .

لتعرف فضاء الدوال:

$$W_h = \{u_h \in C^0(\bar{\Omega}); u_{h,m} = \sum_{i=1}^r u_h(a_i^{(K)}) P_i^{(K)}; \forall K \in T_h, m = 0,1,\dots\} \subset H^1(\Omega) \quad (1)$$

حيث:

$$u_{h,m} = \sum_{i=1}^r u_h(a_i^{(K)}) P_i^{(K)} \quad (2)$$

$r$  عدد العقد.

فيكون فضاء العناصر المنتهية:

$$V_h = \{u_h \in W_h; u_h|_{\Gamma} = 0\} \subset H_0^1(\Omega)$$

حيث  $a_i$  العقد الناتجة من تقطيع المنطقة  $P_j$ ،  $i = 1,2,\dots,r$  دوال الشكل:

في حالة المستطيلات:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{(x-x_2)(y-y_4)}{(x_1-x_2)(y_1-y_4)} & P_2 &= \frac{(x-x_1)(y-y_4)}{(x_2-x_1)(y_1-y_4)} \\ P_3 &= \frac{(x-x_1)(y-y_1)}{(x_2-x_1)(y_4-y_1)} & P_4 &= \frac{(x-x_2)(y-y_1)}{(x_1-x_2)(y_4-y_1)} \end{aligned} \quad (3)$$

في حالة المثلثات:

$$\begin{aligned} 2\Delta &= (x_1-x_3)(y_2-y_3) - (x_2-x_3)(y_1-y_3) \\ P_1 &= \frac{1}{2\Delta} ((x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y) \\ P_2 &= \frac{1}{2\Delta} ((x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y) \\ P_3 &= \frac{1}{2\Delta} ((x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y) \end{aligned} \quad (4)$$

مسألة البحث:

لتكن لدينا معادلة بواسون غير الخطية<sup>6</sup>:

$$\Delta u = F(x, u, \nabla u) \quad ; x = (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = g \quad (5)$$

$$F : \Omega \times H^1(\Omega) \times (L^2(\Omega))^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad ; f(x, y) = F(x, y, u(x, y), \nabla u(x, y))$$

$$f(x, y) \in L^2(\Omega) \quad ; u(x, y) \in H^1(\Omega) \quad ; g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad ; \Gamma = \cup \partial\Omega$$

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية غير الخطية الآتية:

$$N[\phi(x, y, q)] = \Delta[\phi(x, y, q)] - F(x, y, \phi(x, y, q), \nabla \phi(x, y, q)) \quad (6)$$

$$N_1[\phi(x, y, q)] = \phi(x, y, q)|_{\Gamma} - g(x, y)$$

حيث  $N$  مؤثر غير خطي،  $u(x, y)$  دالة مجهولة،  $q$  وسيط  $q \in [0, 1]$ ،  $\phi(x, y, q)$  دالة غير معلومة، يمكن نشرها على صيغة متسلسلة قوى ل  $q$  كما يلي:

$$\phi(x, y, q) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{hm} q^m \quad (7)$$

ليكن  $u_{h0}(x, y)$  الحل الابتدائي للحل الفعلي  $u(x, y)$ ، و  $h \neq 0$  وسيط مساعد  $0 < h \leq 1$  و

$H(x, y) \neq 0$  دالة مساعدة  $H(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ ، و  $L$  مؤثر خطي مساعد يحقق:

$$L[\phi(x, y, q)] = \Delta[\phi(x, y, q)] \quad (8)$$

$$L_1[\phi(x, y, q)] = \phi(x, y, q)|_{\Gamma}$$

ومنه يمكن إنشاء مايسى معادلة التشوه من المرتبة الصفرية:

$$(1-q)L[\phi(x, y, q) - u_{h0}(x, y)] = qh H(x, y) N[\phi(x, y, q)] \quad (9)$$

عندما  $q = 0$  فإن المتسلسلة (7) تصبح:

$$\phi(x, y, 0) = u_{h0}(x, y) \quad (10)$$

عندما  $q = 1$  فإن المتسلسلة (7) تصبح:

$$\phi(x, y, 1) = u(x, y) \quad (11)$$

ومن العلاقاتين (10)، (11)، عندما يزداد الوسيط  $q$  من الصفر إلى الواحد، فإن الحل  $\phi(x, y, q)$  للمعادلة (9) يتشوه استمراريًا من الحل الابتدائي  $u_{h0}(x, y)$  إلى الحل الفعلي  $u(x, y)$  للمعادلة (7)، وللحصول على هذا الحل يجب إيجاد بقية حدود المتسلسلة:

$$\phi(x, y, 1) = u(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{hm}(x, y) = u_{h0}(x, y) + u_{h1}(x, y) + \dots \quad (12)$$

وذلك عن طريق معادلة التشوه من مرتبة عليا:

$$L[u_{hm}(x, y) - \chi_m u_{h,m-1}(x, y)] = h H(x, y) D_{m-1}[N(\phi(x, y, q))] \quad (13)$$

والتي حصلنا عليها بطريقة الاستقراء الرياضي من خلال اشتقاق المعادلة (9) بالنسبة إلى  $q$

حيث:

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & ; m \leq 1 \\ 1 & ; m \geq 2 \end{cases}, \quad D_{m-1}(\phi(x, y, q)) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \phi(x, y, q)}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (14)$$

من أجل  $m = 1$ ، فإن المعادلة (13)، تصبح:

$$\Delta u_{h1}(x, y) = h H(x, y) \left[ \Delta u_{h0}(x, y) - F \left( x, u, u_{h0}, \frac{\partial u_{h0}}{\partial x}, \frac{\partial u_{h0}}{\partial y} \right) \right] \text{ in } \Omega \quad (15)$$

$$u_{h1}|_{\Gamma} = 0$$

ومن أجل  $m \geq 2$ ، فإن المعادلة (13)، تصبح:

$$\Delta u_{h,m}(x, y) = (1 + h H(x, y)) \Delta u_{h,m-1}(x, y) - h H(x, y) D_{m-1} F \left( x, u, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \text{ in } \Omega$$

$$u_{h,m}|_{\Gamma} = 0$$

(16)

بضرب العلاقة (15) بدالة الوزن  $v_h = P_j \in V_h$ ، وبتعويض (2) في العلاقة (15) من أجل  $m = 1$ ،

وبالمكاملة، نجد:

$$a(u_{h1}, v_h) = F_{h1}^{\%}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

$$a(u_{h1}, v_h) = \int_{\Omega} \frac{\partial u_{h1}}{\partial x} \frac{\partial v_h}{\partial x} + \frac{\partial u_{h1}}{\partial y} \frac{\partial v_h}{\partial y} dx dy = \sum_i u_{h,1}(a_i) \int_{\Omega} \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial P_j}{\partial y} dx dy \quad (18)$$

$$F_{h1}^{\%}(v_h) = h \int_{\Omega} H(x, y) \left[ \left( \frac{\partial u_{h0}}{\partial x} \frac{\partial v_h}{\partial x} + \frac{\partial u_{h0}}{\partial y} \frac{\partial v_h}{\partial y} \right) + F \left( x, y, u_{h0}, \frac{\partial u_{h0}}{\partial x}, \frac{\partial u_{h0}}{\partial y} \right) v_h \right]$$

ومن العلاقات (18) يتم إيجاد  $u_{h1}$ ، ومن أجل  $m \geq 2$ ، نضرب العلاقة (16) بدالة الوزن

$v_h = P_j \in V_h$ ، وبتعويض (2) في العلاقة (16)، وبالمكاملة، نجد:

$$a(u_{hm}, v_h) = F_{hm}^{\%}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

$$a(u_{hm}, v_h) = \int_{\Omega} \frac{\partial u_{hm}}{\partial x} \frac{\partial v_h}{\partial x} + \frac{\partial u_{hm}}{\partial y} \frac{\partial v_h}{\partial y} dx dy = \sum_i u_{h,m}(a_i) \int_{\Omega} \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial P_j}{\partial y} dx dy$$

$$F_{hm}^{\%}(v_h) = \int_{\Omega} (1 + h H(x, y)) \left[ \left( \frac{\partial u_{h,m-1}}{\partial x} \frac{\partial v_h}{\partial x} + \frac{\partial u_{h,m-1}}{\partial y} \frac{\partial v_h}{\partial y} \right) + h H(x, y) D_{m-1} \left( F \left( x, y, \phi_h, \frac{\partial \phi_h}{\partial x}, \frac{\partial \phi_h}{\partial y} \right) \right) v_h \right] \quad (19)$$

أو  $i, j = 1, 2, 3, 4$  في حالة المستطيلات، أو  $i, j = 1, 2, 3, 4$  في حالة المثلثات.

و من خلال ما سبق يتم إيجاد  $u_{h1}, u_{h2}, u_{h3}, \dots$ ، ثم بالتعويض في العلاقة (11) نجد الحل التقريبي

المطلوب.

يُعرف الخطأ المطلق والخطأ النسبي:

$$err_{abs}(x, y, h, m) = |u_{hm}(x, y, h) - u(x, y)|$$

$$err_{rel}(x, y, h, m) = |u_{hm}(x, y, h) - u_{h,m-1}(x, y, h)|$$

مثال: لتكن لدينا معادلة بواسون غير الخطية:

$$\Delta u = 3u^2 \quad \text{in } \Omega = (0,1) \times (0,1)$$

$$u|_{x=0} = \frac{4}{(3+y)^2}, \quad u|_{x=1} = \frac{4}{(4+y)^2} \quad (20)$$

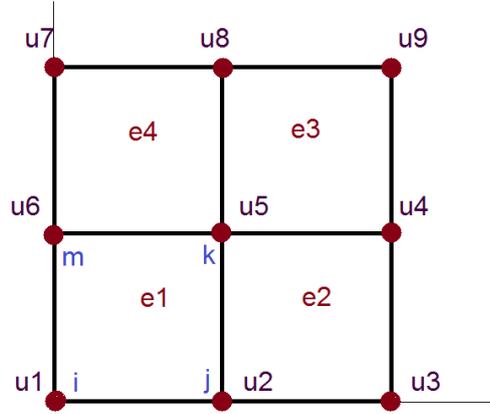
$$u|_{y=0} = \frac{4}{(3+x)^2}, \quad u|_{y=1} = \frac{4}{(4+x)^2}$$

$$u(x, y) = \frac{4}{(3+x+y)^2}$$

مع العلم أن الحل الفعلي للمسألة هو

الحل:

نقسم المنطقة المعطاة إلى أربعة مثلثات، فنجد تسع عقد، حسب الشكل:



الشكل 1 شبكة المستطيلات للمنطقة المعطاة

حسب الشروط الحدية الموضحة في المثال، نجد أن العقدة المجهولة الوحيدة، أما بقية العقد:

$$u_1 = \frac{4}{9}, u_2 = \frac{16}{49}, u_3 = \frac{1}{4}, u_4 = \frac{16}{81}, u_5 = \frac{16}{49}, u_6 = \frac{16}{49}, u_7 = \frac{1}{4}, u_8 = \frac{16}{81}, u_9 = \frac{4}{25}$$

ولإيجاد دوال الشكل، نعوض في العلاقات (3)، فنجدها كما يبينها الجدول:

الجدول 1 دوال الشكل.

	$P_i$	$P_j$	$P_k$	$P_m$
$e_1$	$4xy - 2x - 2y + 1$	$-4xy + 2x$	$4xy$	$-4xy + 2y$
$e_2$	$4xy - 2x - 4y + 2$	$-4xy + 2x + 2y - 1$	$4xy - 2y$	$-4xy + 4y$
$e_3$	$4xy - 4x - 4y + 4$	$-4xy + 2y + 4x - 2$	$4xy - 2x - 2y + 1$	$-4xy + 2x + 4y - 2$
$e_4$	$4xy - 2y - 4x + 2$	$-4xy + 4x$	$4xy - 2x$	$-4xy + 2x + 2y - 1$

لنأخذ المؤثر غير الخطي:

$$N[\phi(x, y, q)] = \Delta[\phi(x, y, q)] - 3\phi^2(x, y, q)$$

حيث  $\phi$  الدالة المعطاة في (7)، ينتج:

$$D_m[\phi^2] = D_m \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^s u_i u_{s-i} \right) P_i \right] = \sum_{i=0}^m u_i u_{m-i} \quad (21)$$

من أجل  $m=1$ ، نعوض في (15)، لإيجاد  $u_{h1}$ ، فنجد:

$$\Delta u_{h1}(x, y) = h H(x, y) [\Delta u_{h0}(x, y) - 3u_{h0}^2] \quad \text{in } \Omega \quad (22)$$

$$u_{h1}|_{\Gamma} = 0$$

بأخذ الحل الابتدائي  $u_5 = 0.0625$ ، نجد:

$$u_{h0} = \frac{94}{225}xy - 0.7248878811x - 0.7248878811y + 0.870443466 \quad (23)$$

نعوض (23) في (22)، وبالمكاملة نجد أن الطرف الأيسر هو:

$$a(u_{h1}, v_h) = \sum_{i=1}^4 u_{h,1}(a_i) \int_{\Omega} \frac{\partial P_i}{\partial x} \frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{\partial P_i}{\partial y} \frac{\partial P_j}{\partial y} dx dy ; j = 1, 2, 3, 4 \quad (24)$$

بتعويض نتائج الجدول 1 في (24)، نجد مصفوفات الصلابة وينتج منها مصفوفة الصلابة العامة:

$$A^{(1)} = A^{(2)} = A^{(3)} = A^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.666667 & -0.166667 & -0.333333 & -0.166667 \\ -0.166667 & 0.666667 & -0.166667 & -0.333333 \\ -0.333333 & -0.166667 & 0.666667 & -0.166667 \\ -0.166667 & -0.333333 & -0.166667 & 0.666667 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.666667 & -0.166667 & 0 & 0 & -0.333333 & -0.166667 & 0 & 0 & 0 \\ -0.166667 & 1.333334 & -0.166667 & -0.333333 & -0.333334 & -0.333333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.166667 & 0.666667 & -0.166667 & -0.333333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333333 & -0.166667 & 1.333334 & -0.333334 & 0 & 0 & -0.333333 & -0.166667 \\ -0.333333 & -0.333334 & -0.333333 & -0.333334 & 2.666668 & -0.333334 & -0.333333 & 0 & 0 \\ -0.166667 & -0.333333 & 0 & 0 & -0.333334 & 1.333334 & -0.166667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.333333 & -0.166667 & 0.666667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.333333 & -0.333334 & -0.333333 & -0.166667 & 1.333334 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.166667 & -0.333333 & 0 & 0 & -0.166667 & 0.666667 \end{pmatrix}$$

أما الطرف الأيمن من (22):

$$F_{h1}^0(v_h) = h \int_{\Omega} H(x, y) \left[ \left( \frac{\partial u_{h0}}{\partial x} \frac{\partial P_j}{\partial x} + \frac{\partial u_{h0}}{\partial y} \frac{\partial P_j}{\partial y} \right) + 3(u_{h0})^2 P_j \right] \quad (25)$$

بأخذ  $H(x, y) = 1, h = 0.5$

بإجراء التكاملات، نعوض (25) و (24) في (22)، نجد:

$$2.666668u_5 = 0.0318712 \Rightarrow u_5 = 0.01195169402 \quad (26)$$

نعوض (26) في (17)، نجد:

$$u_{h1} = \frac{94}{225}xy - 0.7248878811x - 0.7248878811y + 0.6682502127 \quad (27)$$

ومن أجل  $m \geq 2$  نعوض في (20) لإيجاد  $u_{h2}, u_{h3}, \dots$  فنجد:

$$u_{h2} = \frac{94}{225}xy - 0.7248878811x - 0.7248878811y + 0.6591905172$$

$$u_{h3} = \frac{94}{225}xy - 0.7248878811x - 0.7248878811y + 0.6705803115$$

$$u_{h4} = \frac{94}{225}xy - 0.7248878811x - 0.7248878811y + 0.6872336032$$

$$u_{h5} = \frac{94}{225}xy - 0.7248878811x - 0.7248878811y + 0.7060237938 \quad (28)$$

. . . . .  
 . . . . .  
 . . . . .

الجدول 2] الحلول التقريبية والخطأ المرتكب.

الحل التقريبي	العقدة (0.5, 0.5)	الحل الفعلي	الخطأ المطلق
$u_{h0}$	0.2499999999	0.25	$5.5556 \times 10^{-11}$
$u_{h0} + u_{h1}$	0.297806776	0.25	0.04780677599
$u_{h0} + u_{h1} + u_{h2}$	0.3365538565	0.25	0.08655385653
$u_{h0} + \dots + u_{h3}$	0.3866907314	0.25	0.1366907314
$u_{h0} + \dots + u_{h4}$	0.4534808979	0.25	0.2034808979
$u_{h0} + \dots + u_{h5}$	0.5390612551	0.25	0.2890612551

مثال 4-5. لتكن لدينا معادلة بواسون غير الخطية:

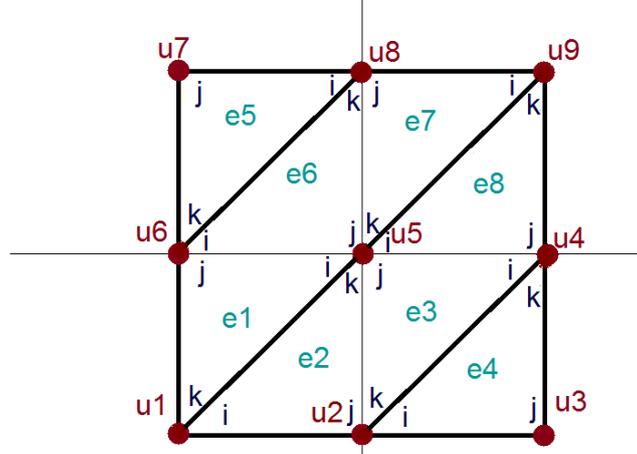
$$\Delta u + u = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{4} \sin 2x \sin 2y \quad ; (x, y) \in D = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$u|_{x=-\frac{1}{2}} = -\sin \frac{1}{2} \cdot \cos y \quad u|_{x=\frac{1}{2}} = \sin \frac{1}{2} \cdot \cos y \quad (29)$$

$$u|_{y=-\frac{1}{2}} = \sin x \cdot \cos \frac{1}{2} \quad u|_{y=\frac{1}{2}} = \sin x \cdot \cos \frac{1}{2}$$

والحل الفعلي يُعطى بالصيغة:  $u(x, y) = \sin x \cdot \cos y$

الحل:



الشكل 2] شبكة المثلثات للمنطقة المعطاة

حسب الشروط الحدية المعطاة في نص المسألة (29)، نجد:

$$u_1\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right) = -\sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} \quad ; \quad u_2\left(0, \frac{-1}{2}\right) = 0 \quad ; \quad u_3\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right) = \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} \quad ; \quad u_4\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \sin \frac{1}{2}$$

$$u_6\left(\frac{-1}{2}, 0\right) = -\sin \frac{1}{2} \quad ; \quad u_7\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} \quad ; \quad u_8\left(0, \frac{1}{2}\right) = 0 \quad ; \quad u_9\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}$$

والعقدة المجهولة الوحيدة  $u_5$ .

تُعطى دوال الشكل حسب (4) بالجدول:

الجدول 3] دوال الشكل.

	$P_i$	$P_j$	$P_k$
$e_1$	$1+2x$	$-2x+2y$	$-2y$
$e_2$	$-2x$	$2x-2y$	$1+2y$
$e_3$	$2x$	$1-2x+2y$	$-2y$
$e_4$	$1-2x$	$1+2x-2y$	$1+2y$
$e_5$	$1+2x$	$-1-2x+2y$	$1-2y$
$e_6$	$-2x$	$1+2x-2y$	$2y$
$e_7$	$2x$	$-2x+2y$	$1-2y$
$e_8$	$1-2x$	$2+2x-2y$	$2y$

لنأخذ حلاً ابتدائياً:

$$u_5 = -0.019198 \Rightarrow u_{h0} = \left( 8 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} + 8 \sin \frac{1}{2} \right) x - 0.06108452257$$

ولإيجاد  $u_{h1}$ ، نعوض في العلاقة الآتية:

$$\int_{\Omega} \nabla u_{h1} \nabla v \, dx dy = h \int_{\Omega} H(x, y) \left[ \nabla u_{h0} \nabla v + \left( \frac{\partial u_{h0}}{\partial x} \frac{\partial u_{h0}}{\partial y} + \frac{1}{4} \sin 2x \sin 2y - 2u_{h0} \right) v \right] dx dy$$

فنجد:

$$u_5 = 0.004387125 \Rightarrow u_{h1} = \left( 8 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} + 8 \sin \frac{1}{2} \right) x + 0.05684110243$$

ولإيجاد  $u_{hm}$  ( $m = 2, 3, \dots$ )، نعوض في العلاقة الآتية:

$$\int_{\Omega} \nabla u_{hm} \nabla v \, dx dy = \int_{\Omega} (1+hH(x, y)) \nabla u_{h,m-1} \nabla v \, dx dy + h \int_{\Omega} H(x, y) \left[ \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial u_{h,m-1-i}}{\partial x} \frac{\partial u_{h,i}}{\partial x} - 2u_{h,m-1} \right] v \, dx dy$$

فنجدها كما يبينها الجدول

الجدول 4] الحلول التقريبية.

$u_5 = 3.2376$	$u_{h2} = \left( 8 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} + 8 \sin \frac{1}{2} \right) x + 16.22290548$
$u_5 = 3.8478$	$u_{h3} = \left( 8 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} + 8 \sin \frac{1}{2} \right) x + 19.27390548$
$u_5 = 5.2777$	$u_{h4} = \left( 8 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} + 8 \sin \frac{1}{2} \right) x + 26.42340548$
$u_5 = 6.451425$	$u_{h5} = \left( 8 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} + 8 \sin \frac{1}{2} \right) x + 32.29203048$

#### المناقشة:

من خلال الأمثلة الموضحة أعلاه عن كيفية تطبيق الطريقة السابقة، تم إيجاد الحل التقريبي يدوياً ثم قمنا بكتابة برنامج ماتلاب وحصلنا على النتائج ذاتها، ونلاحظ أنه كلما زادت خطوات الحل زاد الخطأ المرتكب في هذه الطريقة.

### الخلاصة:

استطعنا في هذا البحث إيجاد الحل التقريبي لمعادلة بواسون غير الخطية باستخدام FE\_HM، حيث وجدنا أن هذه الطريقة أفضل بكثير من طريقة العناصر المنتهية وذلك لأنها تحتاج للكثير من العناصر للوصول للنتائج، وهي أيضاً أسرع من طريقة تحليل الهوموتوبي. توصيات: يُمكننا تطبيق الطريقة المذكورة في مقالتنا هذه على جميع أنواع المعادلات التفاضلية الجزئية (ناقصية، مكافئية، زائدية) والعادية سواء أكانت خطية أم غير خطية والشاذة، ومن المفيد إيجاد تعميم لهذه الطريقة لتطبيق على جميع الأنواع المذكورة أعلاه، ومن المفيد أيضاً دمج طريقة العناصر المنتهية مع طرائق تقريبية أخرى إن أمكن ذلك.

### قائمة المراجع:

- [1] ABBASBANDY, S., (2006). "The Application Of Homotopy Analysis Method To Nonlinee Equations Arising In Heat Transfer", Physics Letlers A 360(1): 109-113.
- [2] AKIN, J, E., (2005). " Finite Element Analysis With Error Estimators", Elsevier Butterworth-Heinemann.
- [3] BARTH, T., GRIEBEL, M., KEYES, D., NIEMINEN, R., ROOSE, D., and SCHLICK, T., (2010). "Automated Solution Of Differential Equtions By The Finite Element Method". University Of Cambridge, United Kingdom.
- [4] BARTH, T., GRIEBEL, M., KEYES, D., NIEMINEN, R., ROOSE, D., and SCHLICK, T., (2010). "The Finite Element Method Theory, Implementation And Applications". Umea University, Swedan.
- [5] BEHR, M., ARDRA, D., CARONADO, M., and Pasquali, M., (2006). " Models and Finite Element Techniques for Blood Flow Simulation", International Journal for Computational Fluid Dynamics.
- [6] CRISTESCU, I, (2013). "Finite Element-Homotopy Analysis For Nonlinear Poisson Equation .University Of Bucharest", Romania.
- [7] DAVIS, M., (2001), "Numerical Methods & Modeling For Chemical Engineers", Wiley, California Institute Of Technology.
- [8] GENG, J., YAN, W., and XU, w., (2007), " Application Of The Finite Element Method In Implant Dentistry", Springer.
- [9] GRUBER, R., and RAPPAPZ, J., (1985). " Finite Element Methods In Linear Ideal Magneto hydrodynamics",
- [10] HERMANN, M. and SARAVI, M., (2016). " Nonlinear Ordinary Differential Equations: Analytical Approximation And Numerical Methods", Springer.
- [11] HSU, T., (1986) " The Finite Element Method In Thermomechanics", Springer Netherland.
- [12] IRANDOUST-PAKCHIN, S. and AHMADIAN, D., (2015). "Homotopy Analysis Method For Computing Eigenvalues Of Sturm-Liouville Problems", International Journal Of Nonlinear Science 19(2):100-106.
- [13] KHURSHEED, A., (1999), " The Finite Element Method In Charged Partiele Optics" Springer US.

- [14] KUMAR, M., and KUMAR, P, (2009). "A Finite Element Approach For Finding Positive Solutions Of Semilinear Elliptic Dirichlet Problems". Motilal Nehru National Institute of Technology, Allahabad 211004, Uttar Pradesh, India,1119-1128.
- [15] LIAO, S., (2003). " Beyond Perturbation: Introduction To The Homotopy Analysis Method, CRC Press.
- [16] LIAO, S., (2012). "Honyopy Analysis Method In Nonlinear Differential Equations", Springer.
- [17] MARKOPOULOS, A., (2013), "Finite Element Method In Mechining Processes", Springer-Verlag London.
- [18] MARRAW, L., (2014). "An Investigation Of The Homotopy Analysis Method For Solving Nonlinear Differential Equations", Austra. Math. Sci. Institute.
- [19] MEUNEIR, G., (2008), "The Finite Element Method For Electromagnetic Modeling", Wiley, United States.
- [20] MUSA, S., (2012), "Computational Finite Element Methods In Nanotechnology", Taylor&Francis.
- [21] RAFTARI, B., KHOSRAVI, H. and YILDIRIM, A., (2013). "Homotopy Analysis Method For The One-Dimensional Hyperbolic Telegraph Equation With Initial Conditions", International Journal Of Numerical Method For Heat & Fluid Flow 23(2): 255-372. [22] SABONNADIÈRE, J., and COULOMB, J., (1987). " Finite Element Methods In CAD: Electrical And Magnetic Field", Springer-Verlag NewYork.
- [23] SADOWSKI, N., (2003), " Electromagnetic Modeling By Finite Element Methods", University Federal De Santa Catarina, Florianopolis, Brazil. [24] WU., J, and, ZHANG., X, (2009). " Finite Element Method By Using Quartic B-Splines ", Numerical Method For Partial Differential Equations, 10.1002, 2055, 818-829.
- [25] ZADEH JAFARI, H, and KARIMI , M., (2010)." Homotopy Analysis Method For Solving Integral And Integro Differential Equations", IJRRAS 2(2): 140-144.