Journal of Nature, Life and Applied Sciences
Volume (4), Issue (1) : 30 Mar 2020
P: 60 - 71

AJSRP
ISSN: 2522-3356

مجلة العلوم الطبيعية والحياتية والتطبيقية
المجلد (4)، العدد (1) : 30 مارس 2020م
ص: 60 - 71

The Generalized Thermodynamical Beltrami – Michell Tensorial Equations for the general Thermodynamical State of the Hooke Body

Waad Samir Attiah

Mountajab Al-Hasan

Faculty of Science || Al-Baath University || Homs || Syria

Abstract: This paper concerns the mathematical linear model of elastic, homogeneous and isotropic body, with no considerable structure and with infinitesimal elastic strains, subjected to Thermal effects, in the frame of coupled thermoelectrodynamics; discussed firstly by Hooke (in the isothermal case), and shortly called (H) . In the this paper, firstly we introduce the invariable tensorial traditional and Lame descriptions of the coupled dynamic, thermoelastic, homogeneous and isotropic Hooke body, which initial configuration forms a simply-connected region in the three dimensional euclidesian manifold. The news of this paper consist in deriving the invariable tensorial , generalized Beltrami – Michell stress-temperature equations for the (H) thermoelastic body (in the more general case than the thermal stress state), which initial configuration forms a simply-connected region in the three dimensional euclidesian manifold. Finally, we end the paper by suggesting problem for discussing, in addition to another open problem.

Keywords: Hooke Thermodynamic Body, Linear Coupled Thermodynamics, the invariable tensorial generalized Beltrami – Michell stress-temperature equations for the general thermal case.

معادلات بيلترامي- ميشيل التنسورية الترموديناميكية المعممة لأجل الحالة الترموديناميكية العامة لجسم هوك

وعد سمير عطية

منتجب الحسن

كلية العلوم || جامعة البعث || حمص || سوريا

الملخص: موضوع البحث هو النموذج الرياضي التقليدي لجسم مرن متماثل المناحي (Isotropic) ومتجانس (Homogeneous)، وغير معتبر البنية الجزيئية ويخضع لانفعالات مرنة، لامتناهية في الصغر، وذلك في إطار المرونة الخطية الديناميكية، المترابطة مع حرارة، والمناقشة بدايةً من قبل الباحث هوك لأجل الحالة متساوية الحرارة، والذي يُرمز له اختصاراً بالرمز (H). في البحث. في البداية سنعرض النموذج الرياضي التقليدي، التنسوري الصامد، ونموذج لامي الرياضي، التنسوري الصامد لجسم هوك المرن (H)، المتجانس، والمتماثل المناحي، في حالته الترموديناميكية التقليدية العامة. أما جديد البحث فهو مناقشة معادلات بيلترامي- ميشيل، التنسورية الصامدة، المعممة إلى الحالة الترموديناميكية (العامة) للجسم المرن (H). وبالنهاية تم اقتراح مسألة للمناقشة، إضافةً إلى مسألة مفتوحة.

الكلمات المفتاحية: الجسم الديناميكي الحراري الخطاف، الديناميكا الحرارية المزدوجة الخطية، معادلات الثقل المعمم البلتريمي - ميشيل المعادية لدرجات حرارة الإجهاد للحالة الحرارية العامة.

1. مقدمة:

قام العديد من الباحثين بمناقشة النموذج الرياضي التقليدي، لجسم هوك والنموذج الرياضي لجسم مرن في نظرية العزوم (Couple Stress Theory) وذلك بالشكل التنسوري الصامد. من هؤلاء الباحثين: غورتين (2010) وتروزديل (1984) ودروبوت (1971)، وليشيك (1970) وهينبوكيل (1996)]. في بحث الحسن وعطية (2019)، نوقش النموذج التنسوري التقليدي ونموذج لامي التنسوري لجسم هوك الترموديناميكي، المتجانس والمتماثل المناحي، وذلك بالشكلين الصامد والناطق في نظام احداثي منحني كيفي على المتنوعة الإقليدية ثلاثية البعد. يتعلق البحث بالجسم المرن غير معتبر البنية الجزيئية ويخضع لتشوهات مرنة لامتناهية في الصغير، والمتجانس والمتماثل المناحي والذي يملك ثلاث درجات حرية وثابتين ماديين والذي وضع أساسه الرياضي الباحث هوك (لأجل الحالة المتساوية درجات الحرارة)، والذي نرمز له اختصاراً بـ(H)، والذي يخضع لحقل حراري. أي يتعلق البحث بالمرونة الخطية الترموديناميكية، المتجانسة والمتماثلة المناحي، والمحددة بثابتين ماديين:$\lambda > 0$, $\mu > 0$. نفترض أن الحالة الابتدائية لهذا الجسم، هي منطقة بسيطة الترابط: B في المتنوعة الإقليدية ثلاثية البعد. كما سنفترض أن جميع الحقول الفيزيائية التي تصف سلوك جسم هوك المرن (H)، هي مقاطع تنسورية، مركباتها توابع حقيقية ملساء بالقدر الكافي، تتبع لنقاط B وللزمن t، أيضاً.

في [1] (1984)، ناقش الباحث تروزديل، الشكل التنسوري الصامد لمعادلات بيلترامي- ميشيل، للحالة السكونية الحرارية، المرنة للجسم (H)، وهنا انطلق الباحث من الشكل التنسوري الصامد لمعادلات توافق الانفعالات. وفي [4] (2011)، ناقش الباحثان إغناتشاك وهيتنارسكي، ناقشوا الشكل التنسوري الصامد لمعادلات بيلترامي- ميشيل، المعممة إلى الحالة الترموديناميكية المرنة للجسم (H)، ذلك في الحالة الخاصة المتمثلة بالإجهادات الحرارية(1). حيث انطلق الباحثون من معادلات لامي التنسورية الصامدة. وفي كل ماتقدم ذكره، تعامل الباحثون مع الحرارة على أنها كمية مفروضة، لا تحتاج إلى معادلة إضافية، ترتبط مع باقي المعادلات، حيث حل جملة المعادلات، الكلية، يعطي الإجهادات والحرارة.

2. هدف البحث:

يهدف البحث إلى استنتاج الشكل التنسوري الصامد لمعادلات الاجهادات والحرارة من نمط بيلترامي- ميشيل، لأجل الحالة الترموديناميكية التقليدية العامة للجسم المرن (H)، المتجانس، والمتماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء، المنطقة B بسيطة الترابط في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد.

3- طرق لبحث:

سنعتمد تعميم طريقة إغناتشاك وهيتنارسكي [4] (2011)، في إيجاد الشكل التنسوري الصامد لمعادلات بيلترامي- ميشيل، الترموديناميكية (العامة) للجسم الترموديناميكي المرن (H) ، المتجانس، والمتماثل المناحي، ويشغل في لحظة البدء المنطقة B بسيطة الترابط في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3.

من أجل متطلبات البحث، سنقدم فيما يلي، وبشكل مقتضب، كلاً من الشكل التنسوري التقليدي الصامد، وشكل لامي التنسوري الصامد للجسم الترموديناميكي المرن (H)، المتجانس والمتماثل المناحي، والخاضع لحرارة، والذي يشغل في لحظة البدء، المنطقة B بسيطة الترابط في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3 [1,4,5,10] .

(1) حالة الإجهادات الحرارية هي الحالة الخاصة من ترموديناميك الجسم المرن (H)، التي تكون فيها معادلة التوصيل الحراري فقط بتابع الحرارة، المجهول، ومن النمط المكافئي، بالتالي تعامل الحرارة في باقي المعادلات، على أنها معلومة.

أولاً) مسألة الوصف التنسوري التقليدي، الصامد للحالة الترموديناميكية المرنة للجسم (H)، المتجانس، والمتماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط B في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3:

توطئة1: نفرض أن جميع الأدلة اللاتينية $i\,,\,j\,,k\,,....$ تأخذ القيم $1\,,2\,,3$ ، وسنعتمد رموز أينشتاين في المتنوعة الإقليدية ثلاثية البعد R^3، ولتكن $O x_1\, x_2\, x_3$ جملة مقارنة ديكارتية قائمة ، ومباشرة، وعطالية، وقاعدتها هي $(\,\mathbf{e}_1\,,\,\mathbf{e}_2\,,\,\mathbf{e}_3\,)$. إن السلوك الترموديناميكي المرنة للجسم المرن (H)، المتجانس والمتماثل المناحي، والخاضع لحرارة، يوصف من خلال مجموعة المقاطع التنسورية $\{\,\mathbf{u}\,,\,\mathbf{E}\,,\,\mathbf{S}\,,\,T\,\}$، حيث $\mathbf{u}$ مقطع متجهي، يمثل فيزيائياً حقل الإزاحة، أما $\mathbf{E}$ و $\mathbf{S}$ فهما مقطعان تنسوريان من المرتبة الثانية، ومتناظران، وفيزيائياً هما على الترتيب، حقل الانفعالات وحقل الاجهادات، أخيراً T هو مقطع تنسوري من المرتبة الصفرية، وفيزيائياً يمثل التغيير عن حرارة الحالة الطبيعية للجسم: T_0 (2). فإذا رمزنا بـ $]\,0\,,\infty\,[=: A^+$ وبـ $A := [\,0\,,\infty\,[$، فيمكن أن تمثل المقاطع التنسورية السابقة في $B\;\times\;A^+$، في النظام الإحداثي الديكارتي $\mathbf{e}_i$، بالشكل التالي:

$$\mathbf{u} = \hat{u}_i\;\mathbf{e}_i\;\;,\;\;\mathbf{E} = \hat{E}_{i\,j}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\;,\;\mathbf{S} = \hat{S}_{i\,j}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j \qquad (3.1)$$

حيث المصفوفة الموجودة في الطرف الأيمن العلاقة الأولى في (3.1) تمثل مصفوفة المركبات في القاعدة الديكارتية $\mathbf{e}_i$ ، لمقطع الإزاحات $\mathbf{u}$، أما المصفوفتان في الطرف الأيمن للعلاقتين الثانية والثالثة في (3.1) فهما متناظرتان، وتمثلان، على الترتيب، مصفوفة المركبات الديكارتية لمقطع الانفعالات التنسوري $\mathbf{E}$، ومصفوفة المركبات الديكارتية لمقطع الإجهادات التنسوري $\mathbf{S}$.

يتألف الوصف التنسوري التقليدي، الصامد، للحالة الترموديناميكية المرنة للجسم (H)، المتجانس والمتماثل المناحي، والخاضع لحرارة، والذي يشغل في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط B في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3، يتألف من المعادلات التنسورية الصامدة، التفاضلية، والعلاقات التنسورية الصامدة، الأساسية، والشروط التنسورية الصامدة، الحدية والابتدائية التالية [1]:

معادلات الحركة، المحققة في $B\;\times\;A^+$:

$$\operatorname{div}\mathbf{S} + \mathbf{b} = \rho\,\ddot{\mathbf{u}} \qquad (3.2)$$

حيث ρ تمثل الكتلة الحجمية لجسم هوك المرن (H) (وهي مقدار ثابت، لأن الجسم متجانس)، و $\mathbf{b}$ مقطع متجهي، يمثل فيزيائياً القوة الحجمية. رمز النقطة يدل على المشتق الجزئي بالنسبة للزمن: $\ddot{\mathbf{u}} = (\partial^2/\partial t^2)\mathbf{u}$ ، $\dot{\mathbf{u}} = (\partial/\partial t)\mathbf{u}$. الرمز div يرمز للتفرق: $\operatorname{div}\mathbf{S} = (\partial_j\,\hat{S}_{j\,i})\;\mathbf{e}_i$، حيث ∂_k يمثل المشتق الجزئي بالنسبة للموضع X_k؛ $\partial_k\,\hat{S}_{j\,i} = \dfrac{\partial\,\hat{S}_{j\,i}}{\partial\,X_k} \equiv \hat{S}_{j\,i\,,k}$.

معادلة الحرارة والانفعال، المحققة في $B\;\times\;A^+$:

$$k\;\operatorname{div}\operatorname{grad}T\; + m\,T_0\,\operatorname{tr}\dot{\mathbf{E}} + r = c\,\dot{T} \qquad (3.3)$$

حيث: k التوصيل الحراري، و m المعامل الإجهادي - الحراري، c الحرارة النوعية للجسم المدروس، وجميعها مقادير حقيقية ثابتة. كما أن: r هو مقطع تنسوري من المرتبة الصفرية، ويمثل فيزيائياً المصادر الحرارية في الجسم المدروس. أخيراً $\operatorname{tr}\dot{\mathbf{E}}$ هو أثر المقطع التنسوري $\dot{\mathbf{E}}$، حيث هذا الأثر هو مقطع تنسوري من المرتبة الصفرية،

(2) الحالة الطبيعية للجسم المرن (H)،الخاضع لحرارة، هي الحالة التي ينعدم فيها كلاً من الأنتروبية والمقطعين التنسوريين: $\mathbf{E}$ و $\mathbf{S}$.

يعطى بالعلاقة: $\operatorname{tr}\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{I}:\dot{\mathbf{E}}$ ، حيث الرمز $\mathbf{I}:\dot{\mathbf{E}}$ يمثل الجداء الداخلي للتنسور المتري $\mathbf{I}$ [(3)] مع المقطع التنسوري $\dot{\mathbf{E}}$ ، وبحسب تعريفه يعطى بـ : $\mathbf{I}:\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_{ij}\,\delta_{ij} = \dot{E}_{kk}$. وبما أن: $\Delta T := \operatorname{div}\operatorname{grad} T$ يمثل اللابلاسيان المطبَّق على المقطع التنسوري من المرتبة الصفرية T ، فتأخذ المعادلة السابقة، بعد الاختصار الشكل التالي:

$$(k\,\Delta - c\,\partial_t)T + mT_0 \operatorname{tr}\dot{\mathbf{E}} = -r \tag{3.4}$$

حيث ∂_t هو المؤثر الاشتقاقي الجزئي، الزمني.

معادلات توافق الانفعالات، المحققة في $B \times A$:

$$\Delta\mathbf{E} + \nabla\nabla(\operatorname{tr}\mathbf{E}) - 2\hat{\nabla}\operatorname{div}\mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{3.5}$$

حيث: $\nabla = \mathbf{e}_i\,\partial_i$ ، كما أن $\Delta\mathbf{E}$ يمثل اللابلاسيان المطبَّق على المقطع التنسوري $\mathbf{E}$ ؛

$\Delta\mathbf{E} = \nabla\cdot(\nabla\mathbf{E}) = \operatorname{div}\operatorname{grad}\mathbf{E} = (\Delta\hat{E}_{ij})\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \hat{E}_{ij,kk}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ ،

وهو بدوره مقطع تنسوري، مرتبته هي نفس مرتبة المقطع التنسوري $\mathbf{E}$. كما أن: $\nabla\nabla(\operatorname{tr}\mathbf{E}) \equiv \operatorname{grad}\operatorname{grad}(\operatorname{tr}\mathbf{E})$ ، وكذلك:

$$\hat{\nabla}\operatorname{div}\mathbf{E} := \operatorname{sym}\nabla\operatorname{div}\mathbf{E} \equiv \frac{1}{2}[\nabla\operatorname{div}\mathbf{E} + (\nabla\operatorname{div}\mathbf{E})^T]$$

حيث: $\nabla\operatorname{div}\mathbf{E} \equiv \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E}$. أخيراً الرمز $\mathbf{Q}^T$ يدل على منقول المقطع التنسوري $\mathbf{Q}$ [(4)].

العلاقات الهندسية، المحققة في $B \times A^+$:

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T] \tag{3.6}$$

حيث: $\nabla\mathbf{u} \equiv \operatorname{grad}\mathbf{u}$.

العلاقة التأسيسية، المحققة في $B \times A$:

$$\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{E} + \lambda(\operatorname{tr}\mathbf{E})\mathbf{I} + mT\,\mathbf{I} \tag{3.7}$$

الشروط الحدية، المحققة على $\partial B \times A$ (حيث ∂B هي الحدود الملساء لـ B):

$$\mathbf{P}(\mathbf{X};t) = \mathbf{S}(\mathbf{X};t)\mathbf{n}(\mathbf{X}) \quad Q(\mathbf{X};t) = \mathbf{q}(\mathbf{X};t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{X}) \quad , \tag{3.8}$$

حيث: $\mathbf{n}(\mathbf{X}) = \hat{n}_i(\mathbf{X})\,\mathbf{e}_i$ متجه واحدة الناظم الخارجي للسطح ∂B في النقطة $\mathbf{X} \equiv (X_1, X_2, X_3)$ منه ، و $\mathbf{q} = -k\,\nabla T$ و $\mathbf{q}(\mathbf{X};t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{X}) = \hat{q}_i(\mathbf{X};t)\hat{n}_i(\mathbf{X})$ و $\hat{P}_i(\mathbf{X};t) = \hat{S}_{ij}(\mathbf{X};t)\hat{n}_j(\mathbf{X})$ ، وحيث كلاً من $\mathbf{P}(\mathbf{X};t)$ و $Q(\mathbf{X};t)$ معطى على $\partial B \times A$.

الشروط الابتدائية، المحققة في $B \times \{0\}$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{f} \;,\quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{g} \;,\quad T = l \tag{3.9}$$

حيث المقطعان المتجهيان: $\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \hat{f}_i(\mathbf{X})\,\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \hat{g}_i(\mathbf{X})\,\mathbf{e}_i$ ، والمقطع التنسوري من المرتبة الصفرية $l(\mathbf{X})$ ، جميعها معلومة في B.

(3) التنسور المطابق (أو المتري): $\mathbf{I} = \delta_{ij}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$.

(4) انظر [1]، صفحة 6.

إن هدف الوصف التنسوري التقليدي، الصامد، لجسم هوك الترموديناميكي، المرن (H)، المتجانس والمتماثل المناحي، هو إيجاد السلوك التنسوري، الترموديناميكي المرن $\{\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}, T\}$ في $\bar{B} \times A$ المحقق لـ (3.1) و(3.2) و(3.9) - (3.4).

ثالثاً) الشكل التنسوري الصامد لمعادلات لامي، الحاكمة للسلوك الترموديناميكي المرن للجسم (H)، المتجانس، والمتماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط B في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3:

نحصل على هذه المعادلات بإتباع مايلي [1]. بأخذ تفرق العلاقة التنسورية (3.7)، والأخذ بعين الاعتبار أن: $\operatorname{div}(\varphi \mathbf{I}) = \nabla \varphi$ ، نحصل على العلاقة التنسورية:

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = 2\mu \operatorname{div} \mathbf{E} + \lambda \nabla (\operatorname{tr} \mathbf{E}) + m \nabla T \qquad (3.10)$$

لكن من (3.6) لدينا:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}[\operatorname{div} \nabla \mathbf{u} + \operatorname{div} (\nabla \mathbf{u})^T] = \frac{1}{2}[\nabla.(\nabla \mathbf{u}) + \nabla(\nabla.\mathbf{u})] \\ &= \frac{1}{2}(\operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}) , \end{aligned} \qquad (3.11)$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{E} = \frac{1}{2}\{\operatorname{tr} (\nabla \mathbf{u}) + \operatorname{tr} [(\nabla \mathbf{u})^T]\} = \operatorname{div} \mathbf{u} \qquad (3.12)$$

ومن جهة أخرى، بحسب تعريف اللابلاسيان لمقطع متجهي، يكون :

$$\Delta \mathbf{u} := \operatorname{div} \nabla \mathbf{u} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} \quad (3.13)$$

بتعويض (3.13)-(3.11) في (3.10) نحصل على العلاقة التنسورية، الصامدة التالية، التي تعطي المقطع المتجهي $\operatorname{div} \mathbf{S}$ بدلالة المقطع المتجهي $\mathbf{u}$ والمقطع التنسوري من المرتبة الصفرية T:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{S} &= \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + m \nabla T \\ &= \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + m \nabla T \end{aligned} \qquad (3.14)$$

الآن، بتعويض (3.14) و(3.12) في المعادلتين (3.2) و(3.4)،على الترتيب، نحصل على معادلتي لامي ، التاليتين، المحققتين في $B \times A^+$:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + m \nabla T + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \qquad (3.15)$$

$$(k \Delta - c\, \partial_t) T + m T_0 \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} = -r \qquad (3.16)$$

من جهة أخرى، بتعويض كلاً من العلاقة التنسورية، الهندسية (3.6) والعلاقة (3.12)، في العلاقة التنسورية، التأسيسية (3.7)، نحصل على العلاقة التنسورية، الصامدة، التالية، التي تربط المقطع التنسوري $\mathbf{S}$ ، بالمقطع المتجهي $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{S} = \mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{I} + mT \mathbf{I} \quad (3.17)$$

إلى المعادلتين (3.15) و(3.16)، نضيف الشروط الحدية التالية، المحققة على $\partial B \times A$:

$$\mathbf{P} = [\mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{I} + mT \mathbf{I}] \mathbf{n} \quad Q = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \quad , (3.18)$$

كما نضيف الشروط الابتدائية (3.9).

ندعو (3.15) و(3.16) بالشكل التنسوري الصامد لمعادلات لامي . كما ندعو (3.15) و(3.16) و(3.18) و(3.9) بالشكل التنسوري الصامد لمسألة لامي للقيم الحدية والابتدائية. أخيراً ندعو(3.15) و(3.16) و(3.18) و(3.9) و(3.6) و(3.17) بالشكل التنسوري الصامد لوصف لامي للجسم الترموديناميكي المرن (H).

آلية حل وصف Lame السابق: بحل مسألة Lame للقيم الحدية والابتدائية (3.15) و(3.16) و(3.18) و(3.9)، نحصل على $\mathbf{u}$ و T. نعوض في كلٍ من (3.6) و(3.17)، فنحصل على كلٍ من $\mathbf{E}$ و $\mathbf{S}$.

3. النتائج والمناقشة:

ستحتوي هذه الفقرة على شيء جديد؛ هو مناقشة الشكل التنسوري الصامد لمعادلات بيلترامي- ميشيل ، المعممة إلى الحالة الترموديناميكية العامة، المرنة للجسم (H)، المتجانس، والمتماثل المناحي(5).

الشكل التنسوري الصامد لمعادلات بيلترامي- ميشيل ، المعممة إلى الحالة الترموديناميكية المرنة للجسم (H)، المتجانس، والمتماثل المناحي:

في [1, p.318] (1984)، تمت مناقشة الشكل التنسوري الصامد لمعادلات بيلترامي- ميشيل لأجل الحالة السكونية الحرارية للجسم (H)، حيث انطلق الباحث من المعادلة التنسورية الصامدة (3.7) لتوافق الانفعالات. وفي [4, p.224] (2011)، تمت مناقشة الشكل التنسوري الصامد لمعادلات إغناتشاك، وذلك لأجل الحالة الخاصة المتمثلة بحالة الإجهادات الحرارية للجسم الترموديناميكي (H)، المتجانس والمتماثل المناحي. في هذه الفقرة سنناقش الشكل التنسوري الصامد لمعادلات بيلترامي- ميشيل ، المعممة إلى الحالة الترموديناميكية (العامة) للجسم (H)، مستخدمين في ذلك طريقة، هي تعميم الطريقة المستخدمة في كلٍ [3] (1959) و[4] (2011)، حيث نقطة الانطلاق هنا هي معادلتا لامي التنسوريتان الصامدتان (3.16)-(3.15)، ودون الحاجة للمعادلة التنسورية، الصامدة (3.5) لتوافق الانفعالات. سنناقش ذلك باتباع مايلي. بدايةً تلزمنا التوطئة التالية.

توطئة2: إن العلاقة التنسورية التأسيسية (3.7) تكافئ العلاقة التنسورية التالية في $B \times A$:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\mu}\left[\mathbf{S} - \frac{\nu}{1+\nu}(\mathrm{tr}\,\mathbf{S})\,\mathbf{I} - m\,\frac{1-2\nu}{1+\nu}\,T\,\mathbf{I}\right] \qquad (4.1)$$

حيث: $\nu = \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ هي نسبة بواسون.

البرهان: بأخذ أثر طرفي العلاقة التنسورية (3.7) ، نجد:

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{S} = (2\mu + 3\lambda)\,(\mathrm{tr}\,\mathbf{E}) + 3mT$$

أو:

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{E} = \frac{1}{2\mu+3\lambda}\left(\mathrm{tr}\,\mathbf{S} - 3mT\right) \qquad (4.2)$$

بالتعويض في (3.7)، من ومن ثم بعزل $\mathbf{E}$ ، نحصل بعد التبسط والاختصار على(4.1).

هذا من جهة أولى، ومن جهة ثانية، بتطبيق المؤثر $\hat{\nabla}$ على طرفي معادلة لامي المتجهية (3.15)، نجد:

---

(5) في [9] (2015)، تم استنتاج معادلات بيلترامي- ميشيل، المعممة إلى الحالة الديناميكية المرنة للجسم (H)، المتجانس، والمتماثل المناحي، والإيزوتيرمي (أي: متساوي درجات الحرارة)، ذلك في نظام احداثي منحني كيفي η_i. الطريقة المستخدمة هي طريقة إغناتشاك [3] (1959)، انطلاقاً من معادلات لامي للحركة، دون الحاجة لمعادلات توافق الانفعالات (The Compatibility Equations). حيث في عام 1959، باعتماد النظام الاحداثي الديكارتي(أبسط أنظمة الاحداثيات المنحنية)، قام الباحث إغناتشاك باستنتاج معادلات بيلترامي- ميشيل من أجل الحالة التحريكية المرنة لجسم هوك المرن(H)، المتجانس والمتماثل المناحي. أخيراً، في [4] (2011)، قام إغناتشاك وهيتنارسكي باستنتاج الشكل التنسوري الصامد لمعادلات بيلترامي- ميشيل لأجل الحالة الخاصة المتمثلة بحالة الإجهادات الحرارية للجسم الترموديناميكي المرن (H)، المتجانس، والمتماثل المناحي.

$$\mu\,\Delta\,\hat{\nabla}\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\hat{\nabla}(\nabla\,\mathrm{div}\mathbf{u}) + m\,\hat{\nabla}(\nabla T) + \hat{\nabla}\mathbf{b} = \rho\hat{\nabla}\ddot{\mathbf{u}} \qquad (4.3)$$

حيث:
$$\hat{\nabla}\mathbf{u} = \mathrm{sym}\,\nabla\mathbf{u} \equiv \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]\ ,\ \hat{\nabla}\mathbf{b} = \mathrm{sym}\,\nabla\mathbf{b} \equiv \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{b} + (\nabla\mathbf{b})^T]$$

و:
$$\hat{\nabla}(\nabla T) = \mathrm{sym}\,\nabla(\nabla T) \equiv \frac{1}{2}\{\nabla(\nabla T) + [\nabla(\nabla T)]^T\}$$

و:
$$\hat{\nabla}(\nabla\,\mathrm{div}\mathbf{u}) = \mathrm{sym}\,\nabla(\nabla\,\mathrm{div}\mathbf{u}) \equiv \frac{1}{2}\{\nabla(\nabla\,\mathrm{div}\mathbf{u}) + [\nabla(\nabla\,\mathrm{div}\mathbf{u})]^T\}$$

ينتج عن ذلك وعن العلاقة التنسورية الهندسية (3.6)، وعن العلاقة (3.12)، وعن كون المقطعين التنسوريين $\nabla(\nabla T)$ و $\nabla(\nabla\,\mathrm{div}\mathbf{u})$ ، متناظرين، أن(4.3) تأخذ الشكل التالي:

$$\mu\,\Delta\,\mathbf{E} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\,\mathrm{tr}\mathbf{E}) + m\,\nabla(\nabla T) + \hat{\nabla}\mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{E}} \qquad (4.4)$$

وبتعويض(3.12) في (3.16)، نجد:

$$(k\,\Delta - c\,\partial_t)T + mT_0\,\mathrm{tr}\dot{\mathbf{E}} = -r \qquad (4.5)$$

نحصل الأن على المطلوب باتباع مايلي. بتعويض(4.1) و(4.2) في كلٍ من (4.4) و(4.5)، فإننا نحصل، على المعادلتين التنسوريتين، التاليين في $B \times A^+$:

$$\begin{aligned}&(\Delta - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\left[\mathbf{S} - \frac{\nu}{1+\nu}(\mathrm{tr}\,\mathbf{S})\,\mathbf{I} - m\,\frac{1-2\nu}{1+\nu}\,T\,\mathbf{I}\right] + \\ &+\frac{1}{1+\nu}\,\nabla\left[\nabla\left(\mathrm{tr}\,\mathbf{S} - 3\,mT\right)\right] + 2m\,\nabla(\nabla T) + 2\,\hat{\nabla}\mathbf{b} = \mathbf{0}\ ,\end{aligned} \qquad (4.6)$$

$$(k\,\Delta - c\,\partial_t)T + \frac{mT_0}{2\mu+3\lambda}\left(\mathrm{tr}\,\dot{\mathbf{S}} - 3\,m\dot{T}\right) = -r \qquad (4.7)$$

واذا وضعنا: $\overset{*}{\square}_2 := \Delta - \frac{1}{\hat{c}_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ، حيث: $\hat{c}_2 := \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ ، فتأخذ عندئذٍ المعادلة (4.6)، بعد التبسيط والاختصار، الشكل التالي:

$$\begin{aligned}&\overset{*}{\square}_2\left[\mathbf{S} - \frac{\nu}{1+\nu}(\mathrm{tr}\,\mathbf{S})\,\mathbf{I} - m\,\frac{1-2\nu}{1+\nu}\,T\,\mathbf{I}\right] + \frac{1}{1+\nu}\nabla\left[\nabla(\mathrm{tr}\,\mathbf{S})\right] \\ &-m\,\frac{1-2\nu}{1+\nu}\nabla(\nabla T) + 2\,\hat{\nabla}\mathbf{b} = \mathbf{0}\end{aligned} \qquad (4.8)$$

وبما أن [1]:

$$\Delta\left[(\mathrm{tr}\,\mathbf{S})\,\mathbf{I}\right] = \left[\Delta\,(\mathrm{tr}\,\mathbf{S})\right]\mathbf{I}\ \ ,\ \ \Delta(T\,\mathbf{I}) = (\Delta\,T)\,\mathbf{I} \qquad (4.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(\mathrm{tr}\,\mathbf{S})\,\mathbf{I}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{tr}\,\mathbf{S})\right]\mathbf{I}\ \ ,\ \ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[(\mathrm{tr}\,\mathbf{S})\,\mathbf{I}\right] = \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathrm{tr}\,\mathbf{S})\right]\mathbf{I} \qquad (4.10)$$

وكون أن المؤثر $\overset{*}{\square}_2$ خطي فأن المعادلة التنسورية (4.8) تصبح بالشكل:

$$\begin{aligned}&\overset{*}{\square}_2\,\mathbf{S}-\frac{\nu}{1+\nu}\left(\overset{*}{\square}_2\,\mathrm{tr}\,\mathbf{S}\right)\mathbf{I}-m\,\frac{1-2\nu}{1+\nu}\left(\overset{*}{\square}_2 T\right)\mathbf{I}\,+\\&+\frac{1}{1+\nu}\nabla\left[\nabla\left(\mathrm{tr}\,\mathbf{S}\right)\right]-m\,\frac{1-2\nu}{1+\nu}\nabla(\nabla T\,)+2\,\hat{\nabla}\mathbf{b}=\mathbf{0}\end{aligned}\tag{4.11}$$

نضيف إليها المعادلة (4.7)، التي تأخذ بعد التبسيط والاختصار، الشكل التالي:

$$D'T+\frac{mT_0}{k\,(2\mu+3\lambda)}\mathrm{tr}\,\dot{\mathbf{S}}=-\frac{r}{k}\tag{4.12}$$

حيث: $D':=D-\dfrac{3m^2T_0}{k\,(2\mu+3\lambda)}\partial_t$ و $D:=\Delta-\dfrac{c}{k}\partial_t$.

بأخذ الـ tr لطرفي المعادلة التنسورية (4.11)، وبالأخذ بعين الاعتبار أن:

$$\mathrm{tr}\,(\Delta\,\mathbf{S})=\Delta(\,\mathrm{tr}\mathbf{S})\ ,\quad \mathrm{tr}(\,\varphi\mathbf{I}\,)=3\varphi\tag{4.13}$$

$$\mathrm{tr}[\,\nabla(\nabla\,\mathrm{tr}\,\mathbf{S})]=\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,(\mathrm{tr}\,\mathbf{S})=\Delta\,(\mathrm{tr}\,\mathbf{S})\tag{4.14}$$

$$\mathrm{tr}[\,\nabla(\nabla T\,)\,]=\mathrm{div}\,\mathrm{grad}T\,=\Delta T\quad,\quad \mathrm{tr}\,(\hat{\nabla}\mathbf{b})=\mathrm{tr}\,(\mathrm{sym}\,\nabla\mathbf{b})=\mathrm{div}\mathbf{b}\tag{4.15}$$

فإننا نجد بعد التبسيط والاختصار، أن:

$$\square_1\!\left(\mathrm{tr}\,\mathbf{S}-3\,mT\,\right)+\frac{m\,(2\mu+3\lambda)}{\lambda+2\mu}\Delta T\,=-\frac{2\mu+3\lambda}{\lambda+2\mu}\,\mathrm{div}\mathbf{b}\tag{4.16}$$

حيث: $\square_1:=\Delta-\dfrac{1}{c_1^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ و $c_1:=\sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}}$. والتي تكتب بالشكل:

$$\square_1\mathrm{tr}\,\mathbf{S}-3m\left[\square_1-\frac{2\mu+3\lambda}{3(\lambda+2\mu)}\Delta\right]T\,=-\frac{2\mu+3\lambda}{\lambda+2\mu}\,\mathrm{div}\mathbf{b}\tag{4.17}$$

وبما أن:

$$\overset{*}{\square}_2\,=\,\square_1+\left(\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{\hat{c}_2^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tag{4.18}$$

فأننا نجد من المعادلة (4.17)، أن:

$$\begin{aligned}&\overset{*}{\square}_2\,\mathrm{tr}\,\mathbf{S}\,=\left(\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{\hat{c}_2^2}\right)\mathrm{tr}\,\ddot{\mathbf{S}}+\\&+3m\left[\square_1-\frac{2\mu+3\lambda}{3(\lambda+2\mu)}\Delta\right]T\,-\frac{2\mu+3\lambda}{\lambda+2\mu}\,\mathrm{div}\mathbf{b}\end{aligned}\tag{4.19}$$

فمن جهة أولى، بتعويض(4.19) في (4.11)، نحصل، بعد التبسيط والاختصار، على المعادلة التنسورية الصامدة التالية، المحققة في $B\times A^+$:

$$\begin{aligned}
&\overset{*}{\square}_2\,\mathbf{S}-\frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{\hat{c}_2^2}\right)\operatorname{tr}\ddot{\mathbf{S}}\,\mathbf{I}\\
&-m\left\{\overset{*}{\square}_2-\frac{3\nu}{1+\nu}\left[\frac{2\mu+3\lambda}{3(\lambda+2\mu)}\Delta+\left(\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{\hat{c}_2^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\right\}T\ \mathbf{I}+\\
&+\frac{\nu}{1+\nu}\frac{2\mu+3\lambda}{\lambda+2\mu}\operatorname{div}\mathbf{b}\ \mathbf{I}+\frac{1}{1+\nu}\nabla\left[\nabla\left(\operatorname{tr}\mathbf{S}\right)\right]\\
&-m\,\frac{1-2\nu}{1+\nu}\nabla(\nabla T)+2\,\hat{\nabla}\mathbf{b}=\mathbf{0}
\end{aligned}\tag{4.20}$$

أو:

$$\begin{aligned}
&\overset{*}{\square}_2\,\mathbf{S}-\frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{\hat{c}_2^2}\right)\operatorname{tr}\ddot{\mathbf{S}}\,\mathbf{I}\\
&-m\left\{\overset{*}{\square}_2-\frac{\nu}{1-\nu}\left[\Delta+\frac{3(1-\nu)}{1+\nu}\left(\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{\hat{c}_2^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\right\}T\ \mathbf{I}+\\
&+\frac{1}{1+\nu}\nabla\left[\nabla\left(\operatorname{tr}\mathbf{S}\right)\right]-m\,\frac{1-2\nu}{1+\nu}\nabla(\nabla T)+2\,\hat{\nabla}\mathbf{b}+\frac{\nu}{1-\nu}\operatorname{div}\mathbf{b}\ \mathbf{I}=\mathbf{0}
\end{aligned}\tag{4.21}$$

وفي الخطوة الأخيرة، من(4.12)، نلاحظ أن:

$$\begin{aligned}
&\overset{*}{\square}_2 T=\left[D'-\frac{1}{\hat{c}_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{1}{k}\left(c+\frac{3m^2T_0}{2\mu+3\lambda}\right)\partial_t\right]T=\\
&=-\frac{mT_0}{k\,(2\mu+3\lambda)}\operatorname{tr}\dot{\mathbf{S}}-\frac{r}{k}-\left[\frac{1}{\hat{c}_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{1}{k}\left(c+\frac{3m^2T_0}{2\mu+3\lambda}\right)\partial_t\right]T\ ,
\end{aligned}\tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta T=\left[D'+\frac{1}{k}\left(c+\frac{3m^2T_0}{2\mu+3\lambda}\right)\partial_t\right]T=\\
&=-\frac{mT_0}{k\,(2\mu+3\lambda)}\operatorname{tr}\dot{\mathbf{S}}-\frac{r}{k}+\frac{1}{k}\left(c+\frac{3m^2T_0}{2\mu+3\lambda}\right)\partial_t T
\end{aligned}\tag{4.23}$$

فبتعويض(4.22) و(4.23) في (4.21)، نحصل ، بعد التبسيط والاختصار، على المعادلة التنسورية الصامدة التالية، المحققة في $B\times A^{+}$:

$$\begin{aligned}&\overset{*}{\Box}_2\,\mathbf{S}-\frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{\hat{c}_2^2}\right)\mathrm{tr}\,\ddot{\mathbf{S}}\,\mathbf{I}+\\ &+m\left\{\frac{1-2\nu}{1-\nu}\left[\frac{mT_0}{k\,(2\mu+3\lambda)}\mathrm{tr}\,\dot{\mathbf{S}}+\frac{r}{k}-\frac{1}{k}\left(c+\frac{3m^2T_0}{2\mu+3\lambda}\right)\frac{\partial T}{\partial t}\right]+\right.\\ &\left.+\left[\frac{1}{\hat{c}_2^2}+\frac{3\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{\hat{c}_2^2}\right)\right]\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right\}\mathbf{I}+\\ &+\frac{1}{1+\nu}\nabla\left[\nabla\left(\mathrm{tr}\,\mathbf{S}\right)\right]-m\,\frac{1-2\nu}{1+\nu}\nabla(\nabla T)+2\,\hat{\nabla}\mathbf{b}+\frac{\nu}{1-\nu}\,\mathrm{div}\mathbf{b}\;\mathbf{I}=\mathbf{0}\end{aligned}\tag{4.24}$$

التي نضيف إليها معادلة الحرارة والإجهاد (4.12)، المحققة أيضاً في $A^+ \times B$.

ندعو (4.24) و(4.12) بالشكل التنسوري الصامد لمعادلات بيلترامي- ميشيل، المعممة إلى الحالة الترموديناميكية المرنة للجسم $(\mathcal{H})$، المتجانس، والمتماثل المناحي.

حالات خاصة:

أ- من أجل الحالة الخاصة المتمثلة بالحالة السكونية الحرارية المرنة للجسم $(\mathcal{H})$، تنعدم المشتقات الجزئية الزمنية في المعادلتين (4.24) و(4.12)، وبالتالي تأخذ هاتان المعادلتان الشكل التالي:

$$\begin{aligned}&\overset{*}{\Box}_2\,\mathbf{S}+\frac{1}{1+\nu}\nabla\left[\nabla\left(\mathrm{tr}\,\mathbf{S}\right)\right]-m\,\frac{1-2\nu}{1+\nu}\nabla(\nabla T)+2\,\hat{\nabla}\mathbf{b}+\frac{\nu}{1-\nu}\,\mathrm{div}\mathbf{b}\;\mathbf{I}+\\ &+\frac{1-2\nu}{1-\nu}\,\frac{m}{k}r\;\mathbf{I}=\mathbf{0}\,,\\ &\Delta T=-\frac{r}{k}\end{aligned}$$

وهي النتائج التي تم الحصول عليها في [1] (1984). انظر أيضاً هيتنارسكي وإغناتشاك [5, p,67] (2013)،

ب- من أجل حالة الإجهادات الحرارية (المتوافقة مع انعدام الحد الحاوي على: $\mathrm{tr}\,\dot{\mathbf{S}}-3m\dot{T}$) ، تصبح (4.24) و(4.12) ، بعد التبسيط والاختصار، بالشكل:

$$\begin{aligned}&\overset{*}{\Box}_2\,\mathbf{S}+\frac{1}{1+\nu}\nabla\left[\nabla\left(\mathrm{tr}\,\mathbf{S}\right)\right]-\frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{\hat{c}_2^2}\right)\mathrm{tr}\,\ddot{\mathbf{S}}\,\mathbf{I}\\ &-m\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\Delta T\;\;\mathbf{I}+m\left[\frac{1}{\hat{c}_2^2}+\frac{3\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{\hat{c}_2^2}\right)\right]\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\;\mathbf{I}\\ &-m\,\frac{1-2\nu}{1+\nu}\nabla(\nabla T)+2\,\hat{\nabla}\mathbf{b}+\frac{\nu}{1-\nu}\,\mathrm{div}\mathbf{b}\;\mathbf{I}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

وهي نفس النتائج التي تم الحصول عليها في كتاب هيتنارسكي وإغناتشاك [4, p,224] (2011).

ج- من أجل الحالة الإيزوتيرمية للجسم $(\mathcal{H})$ (أي لأجل الحالة: $m\to 0$)، فتأخذ عندئذٍ المعادلتان (4.24) و(4.12) الشكل التالي:

$$\overset{*}{\square}_2 \mathbf{S}-\frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{\hat{c}_2^2}\right)\operatorname{tr}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{I}+\frac{1}{1+\nu}\nabla\left[\nabla\left(\operatorname{tr}\mathbf{S}\right)\right]+2\hat{\nabla}\mathbf{b}+\frac{\nu}{1-\nu}\operatorname{div}\mathbf{b}\ \mathbf{I}=\mathbf{0}$$

وهي نفس النتائج التي تم الحصول عليها في كتاب هيتنارسكي وإغناتشاك [4, p,217] (2011). إن الشكل التنسوري الناطق (في نظام احداثي منحني η_i) للمعادلة السابقة تم إعطائه في الحسن وسعد [9] (2015).

4. المقترحات:

أولا) الاستنتاجات: استنتجنا الشكل التنسوري الصامد لمعادلات بيلترامي- ميشيل، المعممة إلى الحالة الترموديناميكية العامة، المرنة للجسم (H)، المتجانس، والمتماثل المناحي ، والذي يشغل في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط B في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3.

ثانياً) المقترحات: يمكن أن نختتم هذا البحث باقتراح ثلاث مسائل للمناقشة، هي الآتية:

مسألة للمناقشة: مناقشة الشكل التنسوري الناطق في نظام إحداثي منحني كيفي لكلٍ من معادلات بيلترامي- ميشيل، ومعادلات إغناتشاك للجسم الترموديناميكي المرن (H)، المتجانس، والمتماثل المناحي.

كما يمكن اقتراح المسألة المفتوحة التالية:

إلى حد هذه اللحظة، إن تحقق المعادلتين التنسوريتين الصامدتين (4.24) و(4.12) هو شرط لازم وغير كافٍ لتحقق معادلات الحالة الترموديناميكية المرنة للجسم (H)، الأمر الذي يخلق المسألة المفتوحة التالية[(6)]، التي قد تكون على الأغلب معقدة. المسألة المفتوحة هي التالية: ماهي الشروط والعلاقات، التي إذا أضفناها للشكل الصامد (4.24) و(4.12)، فإننا نحصل على معادلات تشكل شرطاً لازما وكافياً لتحقق معادلات الحالة الترموديناميكية المرنة للجسم (H).

References

[1] - Truesdell C., (1984) , Mechanics of Solids, Volume II, Springer - Verlag Berlin Heidelberg GmbH.

[2]-Lysik, B., (1970), Matematyczne Podstawy Teorii Sprężystości, Politechnika Wrocłwska.

[3]- Ignaczak , J., (1959), Direct determination of stresses from the stress equations of motion elasticity, Arch. Mech. Stos. 5 , 9.

[4]- Hetnarski, R.B., and Ignaczak, J., (2011), The Mathematical Theory of Elasticity , Second Edition , CRC Press,Taylor & Francis Group,6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300,Boca Raton, FL 33487-2742.

[5]- Hetnarski, R.B., Ignaczak, J., Eslami, M.R., Noda, N., Sumi, N., and Tanigawa, Y., (2013), Theory of Elasticity and Thermal Stresses, Springer Science+Business Media Dordrecht.

[6]- Heinbockel , J.H, (1996), Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics, Department of Mathematics and Statistics, Old Dominion University.

[7]-Drobot , S ,(1971),On Cosserat Continua , Zastos .Math. 12, 323 -346.

(6) تكمن أهمية هذه المسألة بالآتي. في حال إتمام هذه المسألة المفتوحة، فإن حل هذه المسألة يعطينا مباشرةً مقطع الإجهادات، تحليلياً، الأمر الذي يشكل خدمة كبيرة لهندسة تسليح المواد (هندسة التصميم).

[8]-Gurtin ,M.E, (2010), The Mechanics and Thermodynamics of Continua, Cambridge University Press.

[9]- Al-Hasan, M. and Saed, B. , (2015), The generalization of Beltrami – Michell equations of Hooke elastic body to its dynamic state in a curve coordinate system , Journal of Al-Baath University,Vol.37, Nr.2, p. 55-74.

[10]- Al-Hasan, M. and Attiah, W., (2019), The Hooke thermodynamical model in a curve coordinate system, Journal of Al-Baath University,Vol.41, Nr.13, p. 137-152.