

Analytical Studying of Positron Annihilation Equations

Huda Abd- Al Mohaimen Al Droubi

Abd Al Hadi Mostafa Soufan

Faculty of Science || AL Baath University || Syria

Emad Abdel- Raouf Badawi

Faculty of Science || AL Minia University || Egypt

Abstract: In this study examined the changes in some materials by studying different types of positron annihilations, such as free annihilation, bound annihilation, para and ortho positronium annihilation, and found that the o- Ps annihilation passes through a free- annihilation stage called the "pick- off" annihilation. Also solved the equations of the positron annihilation in two ways, computationally and programmatically (using the scilab- 6.0.1 and Mathematica12) according to specific conditions, at the moment $t = 0$, positronium was not yet formed, In the first stage studied the free positron annihilation, in the second stage the annihilation of the p- Ps and in the third phase, the annihilation of the o- Ps was studied, and we have found that the coefficient of decrease in the number of free positrons ($\lambda_p + k_{ps}$) at the same time reflects the probability of positronium formation. Studied the spectrum of the positron and positronium in both para and ortho and determine the positron case by solving the annihilation equations under different conditions and according to the life time of each case, this requires the study of the annihilation spectra of different materials to take advantage of this in the detection of defects in the material and improve the structure.

Keywords: positron – positronium- para positronium- ortho positronium – life time- annihilation rate.

دراسة تحليلية لمعادلات الفناء البوزيتروني

هدى عبد المهيمن الدروبي

عبد الهادي مصطفى صوفان

كلية العلوم || جامعة البعث || سوريا

عماد عبد الرؤوف بدوي

كلية العلوم || جامعة المنيا || مصر

الملخص: في هذا البحث تم دراسة آلية الفناء البوزيتروني للتغيرات التي تطرأ على بعض المواد وذلك من خلال دراسة أنواع مختلفة من الفناء البوزيتروني مثل الفناء الحر والفناء المقيد وفناء البوزيترونيوم بنوعيه الباراء والأورثو بوزيترونيوم وتبين لنا أن فناء الأورثو بوزيترونيوم يمر بمرحلة الفناء الحر والذي يُسمى فناء الالتقاط pick-off. وتم حل معادلات فناء البوزيترون بطريقتين حسابياً وبرمجياً (باستخدام البرنامجين الحاسوبيين scilab- 6.0.1 و Mathematica12) وفق شروط محددة تم اعتبار أنه في اللحظة $t = 0$ لم يكن البوزيترونيوم (بنوعيه الباراء والأورثو) قد تشكل بعد، وتم دراسة جميع المراحل التي يتم فيها الفناء، ففي المرحلة الأولى دُرِسَ تفكك البوزيترون الحروفي المرحلة الثانية تفكك الباراء بوزيترونيوم وفي المرحلة الثالثة تفكك الأورثو بوزيترونيوم، ووُجِدَ أن معامل التناقص في عدد البوزيترونات الحرة ($\lambda_p + k_{ps}$) يُعَبَّرُ في الوقت ذاته عن احتمال تشكل البوزيترونيوم، ودُرِسَ طيف الفناء لكل من البوزيترون والبوزيترونيوم بنوعيه الباراء والأورثو ومن خلال حل معادلات الفناء تم تحديد حالة البوزيترون التي يكون عليها ضمن شروط مختلفة

وحسب عمر كل حالة، وهذا يستدعي دراسة طيوف الفناء لمواد مختلفة للاستفادة من ذلك في كشف العيوب التي تعاني منها المادة وتحسين بنيتها.

الكلمات المفتاحية: البوزيترون - البوزيترونيوم - البارابوزيترونيوم - الأورثوبوزيترونيوم - العمر الزمني - معدل الفناء.

المقدمة:

تُعتبر تقانة عمر البوزيترون (e^+) والبوزيترونيوم (Ps) مقياس نانوي لفحص بنية المادة وتبلورها [10]، [12]، ولمعرفة ذلك لابد من دراسة البوزيترون وفناءه وتحليل بارامترات أطياف فناء البوزيترون [18]. اهتم الكثير من الباحثين بدراسة إنتاج البوزيترون منذ اكتشافه 1932 [5، 1] على نطاق واسع وكذلك دراسة روابط البوزيترونيوم وآلية تشكله من الناحيتين النظرية والتجريبية وكذلك برمجيًا، فقام البعض بدراسة آلية تشكل البوزيترونيوم تجريبياً في الحالة السائلة والصلبة للمادة [18]، ودرس آخرون النماذج النظرية لتشكيل البوزيترونيوم في العديد من المواد [8].

تُستخدم البوزيترونات ذات الطاقة المنخفضة في العديد من مجالات العلوم والتكنولوجيا [19، 6]. حديثاً تم إنتاج بوزيترونات عالية الطاقة في مسرعات الجسيمات [15، 2].

بما أن البوزيترونات جسيمات مشحونة، فهي حساسة للشحنة الكائنة في الفراغ الذي توجد فيه هذه الشحنة، وعندما يوجد البوزيترون في منطقة ذات كثافة إلكترونية عالية سيكون عمره أقصر في الكثافة الإلكترونية العالية مقارنةً مع الحالة التي يوجد فيها كثافة إلكترونية أقل. في عملية فناء البوزيترون- إلكترون تتحول كتلة الجسيم إلى طاقة كهرومغناطيسية، وتنطلق فوتونات غاما.

تملك البوزيترونات التي تدخل المادة قبل أن تفتى طاقات ابتدائية تُقدَّر بحوالي عدة مئات من keV [1]. وتفقد الطاقة عن طريق تأيّن الجزيئات وتنفخض طاقة البوزيترون خلال مراحل مختلفة حتى تصل إلى طاقة $20 eV$ وخلال زمن مقداره تقريباً $10 ps$. ثم تنخفض نتيجة الاهتزازات المثارة داخل وبين الجزيئات، وهذا عادةً يستغرق عدة عشرات من بيكو ثانية [11، 4]. يتم فقدان ما يقرب من نصف الطاقة الحركية للبوزيترون بالتصادمات الرأسية، والنتيجة عن الاصطدام بالكترونات التي طاقتها الحركية حوالي عدة keV ، إن مسارات هذه الإلكترونات تشكل فروع حول أثر البوزيترون. وينفق النصف الآخر من الطاقة في التصادمات العرضية مع الجزيئات. ومتوسط الطاقة المفقودة في مثل هذه التصادمات تُقدَّر بـ $50 - 30 eV$ (كحد أعلى $100 eV$) [18].

كما تتم دراسة فناء البوزيترون لفهم الخصائص الأساسية للبوزيترون ومن أجل البحث في خصائص الوسط الموضوعي لموقع الفناء. يمكن أن يحدث الفناء بين البوزيترونات والإلكترونات الحرة أو بين الجسيمات في الحالة المقيدة أو في حالة تشكل (Ps).

عندما تتناقص طاقة الإلكترون في الوسط إلى طاقات $10 eV >$ ، عندئذ من الممكن أن يتشكل Ps . وقد تنبأ Mohorovicic بذلك بشكل نظري سنة 1934 عن طريق استعمال الميكانيك الكلاسيكي، وأيضاً في سنة 1945 من قبل Ruark بواسطة ميكانيك الكم، وفيما بعد تم اكتشاف ذلك تجريبياً سنة 1951 من قبل Deutsch. تكون فناءات حالة $Ps - p$ من خلال إصدار 2γ وبعمق حوالي $125 ps$ في الفراغ. بينما تعيش حالة $Ps - o$ عمراً أطول ($142 ns \approx$ في الفراغ) لأن فناءه يكون من خلال فوتونات- 3γ والتي تكون عندها كل الطاقات أقل من $0.511 MeV$ [20, 7]. قد ينقص العمر لحالة $Ps - o$ بشكل سريع فيما لو تشكل Ps ضمن سرعة الضوء للذرات وتختلف هذه السرعة حسب نوع ذرات المادة. إن هذا النقص قد يعود لما يسمى عملية (pick-off) والتي يفنى

ففيها البوزيترون في $o - Ps$ مع إلكترون من المادة له سبين معاكس عن طريق اضمحلال 2γ [17]، أو نتيجة للانتقال من $o - Ps$ إلى $p - Ps$ (عملية إخماد) [3].

ولا يزال إلى الآن البحث مستمراً للتوصل إلى الآلية التي تصف سلوك البوزيترون في المادة، عند دخول البوزيترون في المادة يسلك في البداية مسارات مختلفة ويفنى وتنطلق إشعاعات γ بطرق وتفسيرات مختلفة يصعب فهمها حتى الآن وهناك العديد من الطرق لدراسة هذه الظاهرة نظرياً وتجريبياً وبرمجياً، فهناك احتمال لإصدار 3γ و 2γ و γ [13] إلا أن الأمر الأكثر احتمالاً هو إصدار 2γ [9، 16].

مشكلة البحث:

دراسة نظرية برمجية تحليلية لآليات فناء البوزيترون والبوزيترونيوم وتحليل طيوف الفناء ومركبات العمر الزمني له.

مواد البحث وطرائقه:

1- برنامج scilab- 6.0.1:

برنامج SCILAB للحساب الرقمي مهمته المحاكاة والنمذجة، وهو البرنامج البديل والمطور عن برنامج MatLAB، ويمتاز بأنه يتعامل مع كل العمليات الحسابية على أنها مصفوفات، ويمتاز بقدرة كبيرة على رسم الخطوط البيانية وتحليلها وتركيبها ودمجها وهو نسخة مطورة تجمع بين برامج عديدة. ويعمل على أغلب أنظمة الحواسيب Unix, Linux windows, Mac-os. كما يحتوي SCILAB على مئات الدوال الرياضية، مما يجعلنا نحصل من خلاله على نتائج أكثر دقة من البرامج الأخرى.

2- برنامج Mathematica12:

هو أحد لغات البرمجة يتميز بأنه يمكننا وبسهولة من تحديد عملية حسابية معقدة للغاية بحيث لا يستطيع أي كمبيوتر القيام به في أمر واحد فقط، ونحصل من خلاله على عدد كبير جداً من النتائج. يستخدم الكود الداخلي ل Mathematica خوارزميات فعالة للغاية ومحسنة. ولكن هناك بعض المهام التي تتطلب خوارزمياتها الأكثر شهرة دائماً وقتاً كبيراً، إلا أنه لا يمكنه تحليل الطيف إلى مركبات أكثر كما هو الأمر بالنسبة لبرنامج SCILAB.

الجزء العملي:

قمنا بدراسة نظرية وبرمجية وتحليلية لآليات تشكل وتفكك وفناء البوزيترونات والبوزيترونيوم والمراحل الزمنية والطاقية التي يمر فيها البوزيترون قبل وبعد فئانه، وقمنا بحل المعادلات التفاضلية المتعلقة بأنواع مختلفة من الفناء البوزيتروني المتوقع وقمنا برسم طيوف فناء البوزيترون الحر والمُقيد والبارا والأورثو بوزيترونيوم بما في ذلك فناء الـ $pick - off$ المعرف سابقاً، واستنتاج المركبات الزمنية من الطيوف بطريقة برمجية باستخدام البرنامجين scilab- 6.0.1 و Mathematica12، وأوجدنا العلاقة بين عدد البوزيترونات والزمن، كما أوجدنا العلاقة بين معامل التناقص في عدد البوزيترونات الحرة واحتمال تشكل البوزيترونيوم، وأوجدنا حلولاً للمعادلة المعبرة عن عدد البارابوزيترونيوم المتشكلة وفئانها في اللحظة (t) ومثيلها من أجل الأورثو بوزيترونيوم، كما درسنا احتمال تشكل كل من البوزيترون والبوزيترونيوم بنوعيه لأول مرة بطريقة برمجية جديدة آخذين بعين الاعتبار العمر الزمني

لكل حالة وقد أهملنا في حساباتنا تأثير الحقول الخارجية مثل الخلفية الطبيعية والحقول المغناطيسية والإلكترونية الخارجية، وقمنا أيضاً برسم طيوف عمر كل من البوزيترون الحر والبوزيترونيوم بنوعيه بشكل فردي وبعد الجمع باستخدام البرنامجين الحاسوبيين scilab- 6.0.1 و Mathematica12.

النتائج والمناقشة:

تتضمن نماذج اصطلياد البوزيترون التأثير المتبادل بين البوزيترونات والإلكترونات المادة، لقد أوضحت هذه النماذج خصائص العمر الزمني لطيف البوزيترون. لنفترض بأنه عند اللحظة $t = 0$ تتباطأ كل البوزيترونات ضمن العينة و أن ذرة الـ PS لم تكن قد تشكلت بعد أي أن: $n_p(t = 0) = 1$ و $n_{pPS}(t = 0) = n_{oPS}(t = 0) = 0$ ؛ حيث n_p يمثل عدد البوزيترونات الحرة و n_{pPS} عدد البارابوزيترونيوم و n_{oPS} عدد الأورثوبوزيترونيوم، وسنفترض أن البوزيترونات الحرة تتفكك في العينة النقية الناتجة عن الفناء الحر بمعدل λ_p وبواسطة تشكيلة البوزيترونيوم PS بمعدل k_{PS} . وبما أن هناك عدة طرق لتشكيل PS فإن k_{PS} يجب أن يتم استبدالها بواسطة مجموع هذه المعدلات وإذا فرضنا أن $p - PS$ و $o - PS$ تفنى بمعدل λ_{pPS} و λ_{oPS} ، فإن التغيرات لجسيمات الفناء الناتجة خلال الزمن dt تعطى بالعلاقات التالية:

$$\frac{dn_p}{dt} = -(\lambda_p + k_{PS})n_p ; \quad n_p(0) = 1 \quad (1)$$

$$\frac{dn_{pPS}}{dt} = \frac{1}{4}k_{PS}n_p - \lambda_{pPS}n_{pPS} ; \quad n_{pPS}(0) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dn_{oPS}}{dt} = \frac{3}{4}k_{PS}n_p - \lambda_{oPS}n_{oPS} ; \quad n_{oPS}(0) = 0 \quad (3)$$

** تُعبر المعادلة (1) عن تناقص عدد البوزيترونات الحرة n_p في المادة مع الزمن، ويُعبر المقدار $\frac{dn_p}{dt}$ عن

معدل تفكك البوزيترونات في العينة.

حل هذه المعادلة من الشكل: (*) $n_i = c_i \exp(-\lambda_i t)$

حيث $i = p$ من أجل البوزيترون الحر، وبالتالي من المعادلة (*) لدينا:

$$n_p = c_p \exp(-\lambda_p t) \quad (4)$$

وحيث:

n_p : عدد البوزيترونات الحرة في اللحظة t .

c_p : ثابت يتعلق بعدد البوزيترونات الحرة المتشكلة في اللحظة $t = 0$.

λ_p : معدل فناء البوزيترونات الحرة في اللحظة t .

k_{PS} : معدل تشكل البوزيترونيوم في اللحظة t .

نفرض في اللحظة $t = 0$ أن الفناء هو فناء حر فقط أي أن البوزيترونيوم لم يتشكل بعد، لأن البوزيترونيوم يحتاج إلى زمن أكبر [20] $1300 ps$ في حين أن البوزيترون الحر يتشكل بزمن قدره $600 ps$ في المعادن [14] حيث تنخفض طاقة البوزيترون إلى مرتبة (eV) أي حوالي $8 eV$ [14] وبالتالي $n_p(0) = 1$.

ضمن شروط تشكل البوزيترون الحر يمكن استبدال $n_p(0) = 1$ في المعادلة (4) فنجد أن: $1 = c_p \exp(0)$ وبالتالي:

$$c_p = 1 \quad (5)$$

تدل العلاقة الأخيرة أن جميع البوزيترونات لا تزال حرة في المادة التي حقنت فيها ولم تُشكّل أي نوع من الروابط البوزيترونية.

نبدل (5) في (2) نحصل على:

$$n_p = \exp(-\lambda_p t) \quad (6)$$

بعد تشكل البوزيترونات الحرة ودخولها للمادة تشكل أنواع مختلفة من الروابط البوزيترونية:

- تفتى البوزيترونات الحرة مع الإلكترونات الحرة في العينة النقية بمعدل λ_p وتشكل لنا ما يسمى الفناء الحر.

- وهناك بوزيترونات أخرى تشكل رابطة أقوى تسمى البوزيترونيوم وتتشكل بمعدل k_{PS} والتي تفتى بمعدل λ_{PS} .

ويُعبّر عن ذلك بالعلاقة التالية والتي قمنا باستنتاجها بطريقتين حسابية وبرمجية:

$$n_p = \exp(-(\lambda_p + k_{PS})t) \quad (7)$$

حيث أن تشكل البوزيترونيوم لا يزال في مراحله الزمنية الأولى.

بكلام آخر استبدلنا λ_i في المعادلة (*) بواسطة مجموع هذه المعدلات $(\lambda_p + k_{PS})$ ؛ وحيث أن

البوزيترونيوم لم يتشكل أي أن $k_{PS} = 0$ في اللحظة $t = 0$. نعوض n_p من المعادلة (7) في المعادلة (1) نحصل على:

$$\frac{dn_p}{dt} = -(\lambda_p + k_{PS}) \exp(-(\lambda_p + k_{PS})t) \quad (8)$$

والتي تعبر عن معدل فناء البوزيترون الحر وتشكل البوزيترونيوم.

نكامل المعادلة (8) بالنسبة للزمن:

$$n_p = - \int (\lambda_p + k_{PS}) \exp(-(\lambda_p + k_{PS})t) dt \quad (9)$$

بما أن مُعدّل فناء البوزيترون الحر وتشكل البوزيترونيوم $(\lambda_p + k_{PS})$ مقدار ثابت [20] يمكن إخراج

خارج التكامل، وبما أن: $\int \exp(-\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} \exp(\alpha x)$ (تكامل شهير) حيث α ثابت، وبالتالي فإن:

$$n_p = -(\lambda_p + k_{PS}) \frac{1}{-(\lambda_p + k_{PS})} \exp(-(\lambda_p + k_{PS})t) \\ n_p(t) = + \exp[-(\lambda_p + k_{PS})t] \quad (10)$$

وهو نفس الحل الذي حصلنا عليه برمجياً باستخدام برنامج Mathematica 12. كما قمنا برسم الخط

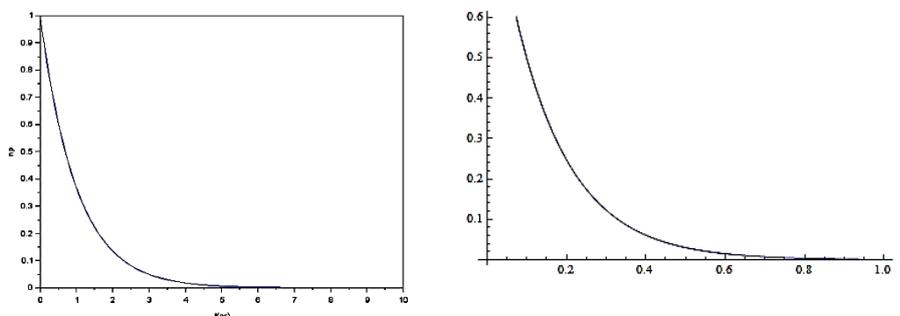
البياني للمعادلة (10) باستخدام البرنامجين المذكورين سابقاً وهو موضح بالشكل (1).

أي أن عدد البوزيترونات المتشكلة في اللحظة t هو تابع أسّي للزمن. وتوضح هذه المعادلة أن عدد

البوزيترونات يتناقص بمرور الزمن ضمن المادة وذلك بسبب وجود الإلكترونات التي تتحد مع البوزيترونات مُشكلةً

البوزيترونيوم (بنوعيه) أو بسبب فوائده مباشرةً مع الإلكترونات الحرة في المادة، وهذا ما يوضحه الشكل (1)، ويمثل

المقدار $(\lambda_p + k_{pS})$ معامل التناقص في عدد البوزيترونات الحرة (وتدل إشارة (-) على التناقص) والذي يعبر في الوقت ذاته عن احتمال تشكل البوزيترونيوم.



الشكل 1 معدل الفناء للبوزيترون الحر

يوضح هذا الخط البياني شكلاً نموذجياً لطيف العمر الزمني للبوزيترون الحر. ينتج عن فناء البوزيترونات الحرة تشكل البوزيترونيوم بمعدل k_{pS} ويعتمد عدد البارابوزيترونيوم المتشكل في لحظة زمنية ما على معدل فناء البوزيترونات الحرة من جهة وعلى معدل فناء البارابوزيترونيوم من جهة أخرى:

$$\frac{dn_{pPS}}{dt} = \frac{1}{4}k_{pS}n_p - \lambda_{pPS}n_{pPS}; n_{pPS}(0) = 0 \quad (2)$$

حيث: λ_{pPS} معدل فناء البارابوزيترونيوم.

$\frac{dn_{pPS}}{dt}$: معدل تفكك (عدد) البارابوزيترونيوم.

يعبر الحد $\frac{1}{4}k_{pS}n_p$ عن معدل فناء البوزيترونات الحرة (تشكل البارابوزيترونيوم)، ويمثل الحد

$\lambda_{pPS}n_{pPS}$ معدل فناء البارابوزيترونيوم.

بإعادة ترتيب الحدود نجد:

$$\frac{dn_{pPS}}{dt} + \lambda_{pPS}n_{pPS} = \frac{1}{4}k_{pS}n_p \quad (11)$$

$$\frac{dn_{pPS}}{dt} + \lambda_{pPS}n_{pPS} = \frac{1}{4}k_{pS} \exp[-(\lambda_p + k_{pS})t] \quad (12)$$

نضرب طرفي المعادلة بـ $\exp(\lambda_{pPS}t)$ نجد:

$$\begin{aligned} \exp(\lambda_{pPS}t) \cdot \frac{dn_{pPS}}{dt} + \lambda_{pPS} \exp(\lambda_{pPS}t) \cdot n_{pPS} \\ = \frac{1}{4}k_{pS} \exp[-(\lambda_p + k_{pS} - \lambda_{pPS})t] \end{aligned} \quad (13)$$

ومن قواعد التكامل لدينا: $\frac{d}{dt}(x \cdot y) = y \cdot \frac{dx}{dt} + x \cdot \frac{dy}{dt}$ وبالتالي نلاحظ أن:

$$\frac{d(n_{pPS} \cdot \exp(\lambda_{pPS}t))}{dt} = \exp(\lambda_{pPS}t) \cdot \frac{dn_{pPS}}{dt} + \lambda_{pPS} \exp(\lambda_{pPS}t) \cdot n_{pPS}$$

نبدل في (13) نجد:

$$\frac{d(n_{pPs} \cdot \exp(\lambda_{pPs} t))}{dt} = \frac{1}{4} k_{pS} \exp[-(\lambda_p + k_{pS} - \lambda_{pPs})t] \quad (14)$$

بمكاملة (14) نحصل على:

$$n_{pPs} \cdot \exp(\lambda_{pPs} t) = \frac{1}{4} \frac{k_{pS}}{-(\lambda_p + k_{pS} - \lambda_{pPs})} \exp[-(\lambda_p + k_{pS} - \lambda_{pPs})t] + C \quad (15)$$

حيث C ثابت التكامل وهو ثابت يتعلق بعدد البارابوزيترونيوم المتشكلة، نحسبه في اللحظة $t = 0$ حيث

في بدء الزمن $t = 0$ لم يكن البوزيترونيوم (البارا) قد تشكل أي $n_{pPs}(0) = 0$ نبدل في (15) نجد:

$$\begin{aligned} n_{pPs}(0) \cdot \exp(0) &= -\frac{1}{4} \frac{k_{pS}}{(\lambda_p + k_{pS} - \lambda_{pPs})} \exp[0] + C \\ \Rightarrow C &= \frac{1}{4} \frac{k_{pS}}{(\lambda_p + k_{pS} - \lambda_{pPs})} \quad (16) \end{aligned}$$

نلاحظ أن الثابت يتعلق بكل من ثابت تفكك البوزيترون وثابت تفكك البارابوزيترونيوم وثابت تشكل

البوزيترونيوم. نبدل في (15) للحصول على عدد البارابوزيترونيوم المتشكل نجد:

$$n_{pPs} \cdot \exp(\lambda_{pPs} t) = \frac{1}{4} \left[\frac{k_{pS}}{(\lambda_p + k_{pS} - \lambda_{pPs})} \right] [-\exp[-(\lambda_p + k_{pS} - \lambda_{pPs})t] + 1] \quad (17)$$

وبضرب طرفي المعادلة بـ $\exp(-\lambda_{pPs} t)$ نحصل على ما يلي:

$$n_{pPs} = \frac{1}{4} \left[\frac{k_{pS}}{(\lambda_p + k_{pS} - \lambda_{pPs})} \right] \left[\exp(-\lambda_{pPs} t) - \exp[-(\lambda_p + k_{pS})t] \right] \quad (18)$$

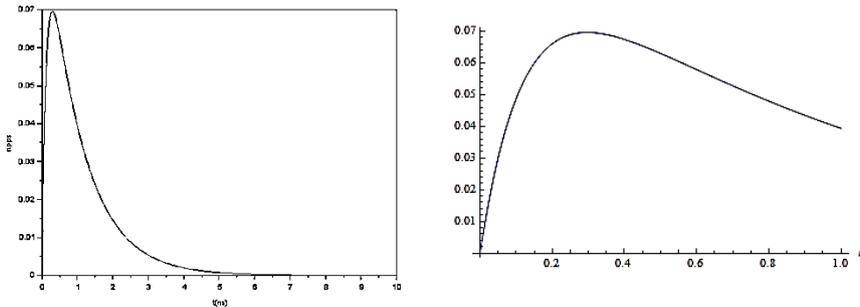
وهو عدد البارابوزيترونيوم المتشكلة في اللحظة (t) عندما يكون سبيني كل من الإلكترون والبوزيترون

بجهتين متعاكستين، وهو نفس الحل الذي حصلنا عليه برمجياً، والموضح في الشكل (2) حيث قمنا برسم الخط

البياني للمعادلة (18): لوجظ أن الحل مكون من حدين الأول $\exp[-(\lambda_p + k_{pS})t]$ يتعلق بعدد فناءات

البوزيترون، والثاني $\exp(-\lambda_{pPs} t)$ بعدد فناءات البارابوزيترونيوم، كما لوجظ أن نسبة البارابوزيترونيوم

المتشكل تساوي 25%.



الشكل 2 معدل فناء البارابوزيترونيوم

يوضح هذا الخط البياني شكلاً نموذجياً لطيف العمر الزمني للبارابوزيترونيوم،

- ينتج عن فناء البوزيترونات الحرة تشكل البارابوزيترونيوم بمعدل k_{pS} ونسبة تقدر بـ 25% وذلك عندما يكون سبيني كل من الإلكترون والبوزيترون بجهتين متعاكستين، وعندما يكون السبينيين بجهة واحدة يتشكل الأورثوبوزيترونيوم الذي يعتمد عدده في لحظة زمنية ما على معدل فناء البوزيترونات الحرة من جهة وعلى معدل فناء الأورثوبوزيترونيوم من جهة أخرى وفق المعادلة:

$$\frac{dn_{oPs}}{dt} = \frac{3}{4} k_{pS} n_p - \lambda_{oPs} n_{oPs} ; n_{oPs}(0) = 0 \quad (3)$$

حيث: λ_{OPs} : معدل فناء الأورثو بوزيترونيوم.

n_{OPs} : عدد الأورثو بوزيترونيوم المتشكلة في اللحظة t .

$\frac{dn_{OPs}}{dt}$: معدل تفكك الأورثو بوزيترونيوم.

يعبر الحد $\frac{3}{4}k_{Ps}n_p$ عن معدل فناء البوزيترونات الحرة (تشكل الأورثو بوزيترونيوم)، ويمثل الحد

$\lambda_{OPs}n_{OPs}$ معدل فناء الأورثو بوزيترونيوم.

بإعادة ترتيب الحدود نجد:

$$\frac{dn_{OPs}}{dt} + \lambda_{OPs}n_{OPs} = \frac{3}{4}k_{Ps}n_p \quad (19)$$

$$\frac{dn_{OPs}}{dt} + \lambda_{OPs}n_{OPs} = \frac{3}{4}k_{Ps} \exp[-(\lambda_p + k_{Ps})t] \quad (20)$$

نضرب طرفي المعادلة بـ $\exp(\lambda_{OPs}t)$ نجد:

$$\begin{aligned} \exp(\lambda_{OPs}t) \cdot \frac{dn_{OPs}}{dt} + \lambda_{OPs} \exp(\lambda_{OPs}t) \cdot n_{OPs} \\ = \frac{3}{4}k_{Ps} \exp[-(\lambda_p + k_{Ps} - \lambda_{OPs})t] \quad (21) \end{aligned}$$

ومن قواعد التكامل لدينا: $\frac{d}{dt}(x \cdot y) = y \cdot \frac{dx}{dt} + x \cdot \frac{dy}{dt}$ وبالتالي نلاحظ أن:

$$\frac{d(n_{OPs} \cdot \exp(\lambda_{OPs}t))}{dt} = \exp(\lambda_{OPs}t) \cdot \frac{dn_{OPs}}{dt} + \lambda_{OPs} \exp(\lambda_{OPs}t) \cdot n_{OPs}$$

نبدل في (21) نجد:

$$\frac{d(n_{OPs} \cdot \exp(\lambda_{OPs}t))}{dt} = \frac{3}{4}k_{Ps} \exp[-(\lambda_p + k_{Ps} - \lambda_{OPs})t] \quad (22)$$

بمكاملة (22) نحصل على:

$$n_{OPs} \cdot \exp(\lambda_{OPs}t) = \frac{3}{4} \frac{k_{Ps}}{-(\lambda_p + k_{Ps} - \lambda_{OPs})} \exp[-(\lambda_p + k_{Ps} - \lambda_{OPs})t] + C \quad (23)$$

حيث C ثابت التكامل وهو ثابت يتعلق بعدد الأورثو بوزيترونيوم المتشكلة، نحسبه في بدء الزمن $t = 0$

حيث لم يكن البوزيترونيوم (الأورثو) قد تشكل، من (3) لدينا $n_{OPs}(0) = 0$ نبدل في (23) نجد:

$$\begin{aligned} n_{OPs}(0) \cdot \exp(0) &= -\frac{3}{4} \frac{k_{Ps}}{(\lambda_p + k_{Ps} - \lambda_{OPs})} \exp[0] + C \\ 0 &= -\frac{3}{4} \frac{k_{Ps}}{(\lambda_p + k_{Ps} - \lambda_{OPs})} + C \\ \Rightarrow C &= \frac{3}{4} \frac{k_{Ps}}{(\lambda_p + k_{Ps} - \lambda_{OPs})} \quad (24) \end{aligned}$$

نلاحظ أن الثابت C يتعلق بكل من ثابت تفكك البوزيترون و ثابت تفكك الأورثو بوزيترونيوم وثابت تشكل

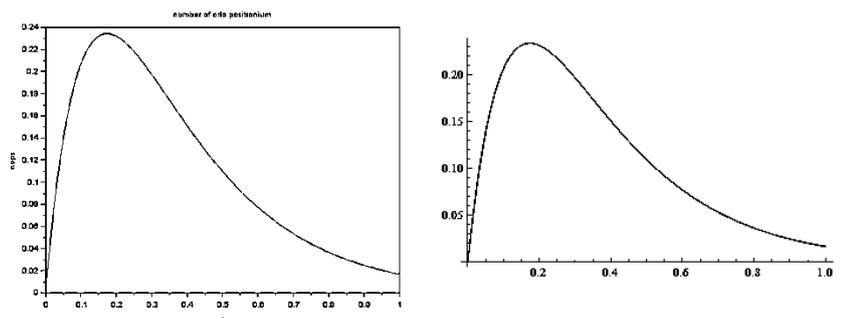
البوزيترونيوم. نبدل في (23) للحصول على عدد الأورثو بوزيترونيوم المتشكل نجد:

$$n_{OPs} \cdot \exp(\lambda_{OPs}t) = \frac{3}{4} \left[\frac{k_{Ps}}{(\lambda_p + k_{Ps} - \lambda_{OPs})} \right] [-\exp[-(\lambda_p + k_{Ps} - \lambda_{OPs})t] + 1] \quad (25)$$

وبضرب طرفي المعادلة بـ $\exp(-\lambda_{OPs}t)$ نحصل على ما يلي:

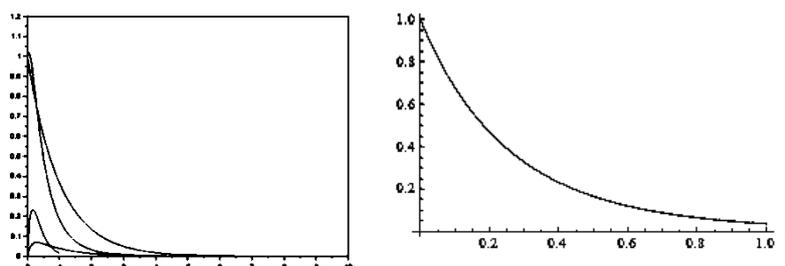
$$n_{oPs} = \frac{3}{4} \left[\frac{k_{Ps}}{(\lambda_p + k_{Ps} - \lambda_{oPs})} \right] \left[\exp(-\lambda_{oPs}t) - \exp[-(\lambda_p + k_{Ps})t] \right] \quad (26)$$

وهو نفس الحل الذي حصلنا عليه برمجياً، والموضح في الشكل (3) ويمثل عدد الأورثو بوزيترونيوم المتشكلة في اللحظة t عندما يكون سببي كل من الإلكترون والبوزيترون بجهة واحدة. نلاحظ أن الحل مكون من حدين الأول $\exp[-(\lambda_p + k_{Ps})t]$ يتعلق بعدد فناءات البوزيترون، والثاني $\exp(-\lambda_{oPs}t)$ بعدد فناءات الأورثو بوزيترونيوم، كما نلاحظ أن نسبة الأورثو بوزيترونيوم المتشكل تساوي 75%، أي أن احتمال تشكل الأورثو بوزيترونيوم أكبر بثلاثة أضعاف من احتمال تشكل البارابوزيترونيوم.



الشكل 3 معدل فناء الأورثو بوزيترونيوم

يوضح هذا الخط البياني شكلاً نموذجياً لطيف عمر الأورثو بوزيترونيوم، ثم قمنا برسم الخط البياني الشكل 4 الذي يُعبر عن كل من البوزيترون الحر والبوزيترون المُقيد والبوزيترونيوم بنوعيه بعد الجمع فحصلنا على المنحنيين التاليين، يمثل المنحني على اليمين الطيف الذي حصلنا عليه باستخدام Mathematica12، أما المنحني في جهة اليسار فيمثل الطيف الذي حصلنا عليه باستخدام Scilab، وهو أول برنامج يعطي مركبات الفناء كل على حدة:



الشكل 4 الطيف الناتج عن مجموع طيوف البوزيترون

الاستنتاجات:

1- وجد من حل المعادلة (1) التي تعبر عن عدد فناءات البوزيترون، أن عدد البوزيترونات المتشكلة في اللحظة t هو تابع أسّي للزمن، وتوضح هذه المعادلة أن عدد البوزيترونات يتناقص بمرور الزمن ضمن المادة وذلك بسبب وجود الإلكترونات التي تتحد مع البوزيترونات مُشكلةً فيما بعد البارابوزيترونيوم أو بسبب فناءه مباشرةً مع الإلكترونات الحرة في المادة.

- 2- وجد أيضاً من حل المعادلة (1) أن عدد البوزيترونات يتناقص بمرور الزمن ضمن المادة بسبب فناءه مباشرةً مع الإلكترونات الحرة الموجودة فيها، ووجدنا أن معامل التناقص في عدد البوزيترونات الحرة $(\lambda_p + k_{ps})$ يُعبر في الوقت ذاته عن احتمال تشكل البوزيترونيوم.
- 3- تم رسم الخط البياني الذي يمثل طيف عمر البوزيترون بعد حل المعادلة (1) المتعلقة بعدد فناءات البوزيترون ووجد تطابق الخط البياني الذي يمثل طيف البوزيترون الشكل (1) الذي تم الحصول عليه باستخدام كل من Mathematica و Scilab مطابقتاً لما وجدته الباحث [16].
- 4- قمنا بحل المعادلة (2) بعدة طرق (كلاسيكياً وبرمجياً) باستخدام كل من البرنامجين الحاسوبيين Mathematica و Scilab وحصلنا على الحل والممثل بالمعادلة (18) فوجد تطابقاً واضحاً للباحث [10]، فوجدنا أن الحل مكون من حدين الأول $exp[-(\lambda_p + k_{ps})t]$ يتعلق بعدد فناءات البوزيترون، والثاني $exp(-\lambda_{pst})$ بعدد فناءات البارا البوزيترونيوم.
- 5- وجد أن نسبة البارا بوزيترونيوم المتشكل تساوي 25% وهذا يتطابق مع القيم المرجعية [16].
- 6- وجد أن هناك تطابق في الخط البياني الذي يمثل طيف البارا البوزيترونيوم الشكل (2) الذي تم الحصول عليه باستخدام كل من Mathematica و Scilab.
- 7- تم حل المعادلة (3) بعدة طرق (كلاسيكياً وبرمجياً) وحُصل على الحل الممثل بالمعادلة (26) الذي يعبر عن عدد الأورثو بوزيترونيوم المتشكلة في اللحظة t عندما يكون سبب كل من الإلكترون والبوزيترون بجهة واحدة، فوجدنا تبايناً مع المرجع [16]. ووجد أن الحل مكون من حدين الأول $exp[-(\lambda_p + k_{ps})t]$ يتعلق بعدد فناءات البوزيترون، والثاني $exp(-\lambda_{pst})$ بعدد فناءات الأورثو بوزيترونيوم.
- 8- وجد أن نسبة الأورثو بوزيترونيوم المتشكل تساوي 75%، أي أن احتمال تشكل الأورثو بوزيترونيوم أكبر بثلاثة أضعاف من احتمال تشكل البارا بوزيترونيوم.
- 9- وجد أن هناك تطابق في الخط البياني الذي يمثل طيف الأورثو البوزيترونيوم الشكل (3) الذي تم الحصول عليه باستخدام كل من Mathematica و Scilab.
- 10- ومن خلال حل معادلات الفناء تم تحديد حالة البوزيترون التي يكون عليها في لحظة الفناء: البوزيترون الحر، البوزيترون الذي تم التقاطه في المصائد، حالات مختلفة من ذرة الـ PS ، كنتيجة للتفاعلات البوزيترونية متوسطة المدى قبل الفناء، وذلك حسب العمر الزمني لكل حالة.
- 11- إن الكمية النسبية لحالات $PS - 0 - PS: p - 1:3$ هي في غياب الحقول الإلكترونية والمغناطيسية الخارجية وهذا مطابق للباحث [16].
- 12- وجد بطريقة جمع الطيوف المعبرة عن حالات البوزيترون لمختلف الحوادث البوزيترونية تمايزاً في الخطوط البيانية بين البرنامجين المستخدمين فتم الحصول ولأول مرة باستخدام برنامج Scilab على الطيف الذي يوضح طيوف البوزيترون كل على حدة وبنفس الخط البياني، وهذا ما لم يتم الحصول عليه باستخدام برامج أخرى مثل برنامج Mathematica.

التوصيات:

- 1- دراسة أطياف الفناء الزمني لأنواع مختلفة من المواد ومقارنتها مع الطيف النموذجي الذي تم الحصول عليه.

2- دراسة ورسم أطياف الفناء البوزيتروني المدروسة سابقاً باستخدام برنامج Scilab والمقارنة بين مركبات الأطياف واستنباط المعلومات منها.

المصادر

- [1] ANDERSON, C. D., "1932 The apparent existence of easily delectable positives", *Science* (1967),238-239.
- [2] CHEN, H., WILKS, S. C., BONLIE, J. D., LIANG, E. P., MYATT, J., PRICE, D. F.,MEYERHOFER, D. D. & BEIERSDORFER, P., "Relativistic positron creation using ultraintense short pulse lasers", *Phys. Rev. Lett.* 102, 105001, 2009.
- [3] DELLER, A. (2019) "SSPALS: A tool for studying positronium" Nuclear Inst. and Methods in Physics Research, A.
- [4] DRYZEK, J. and HORODEK, P., *Mat. Sci. Forum*, 2011, 666:10–14.
- [5] Embreus, O., Hesslow, L., Hoppe, M., Papp, G., Richards, K., and Fulop, T., (2018) "Dynamics of positrons during relativistic electron runaway" *J. Plasma Phys.*
- [6] GABRIELSE, G., BOWDEN, N. S., OXLEY, P., SPECK, A., STORRY, C. H., TAN, J. N.,WESSELS, M., GRZONKA, D., OELERT, W., SCHEPERS, G., SEFZICK, T., WALZ, J., PITTNER, H.,HANSCH, T. W. & HESSELS, E. A. 2002, "Background- free observation of cold antihydrogen with _eld- ionization analysis of its states", *Phys. Rev. Lett.* 89, 213401.
- [7] HAGIWARA, S. (2017) "Positron States in Solids and at Surfaces Studied by Tow- component Density Functional Theory", Unpublished Ph.D, Tokyo University of Science.
- [8] KANSY, J. "A Comparison of Different Theoretical Models of Positron Lifetime Spectra for Polymers", *ACTA PHYSICA POLONICA A.* 113. 5, 1397- 1407,2008.
- [9] MOSKAL, P. et al., (2019) "Feasibility study of the positronium imaging with the J- PET tomograph" <https://www.researchgate.net/publication/330373048>.
- [10] PANZARASA, G. CONSOLATI, G. SCAVINI, M. LONGHI, M. and QUASSO, F. (2019) "Convenient Preparation of Graphene Oxide from Expandable Graphite and Its Characterization by Positron Annihilation Lifetime Spectroscopy" *C Journal of carbon Research.*
- [11] PARETZKE, H.G. In G.R. Freeman, editor, "Kinetics of Nonhomogeneous Processes", *John Wiley & Sons*, New York, pages 89–170, 1987.
- [12] Petschke, D., Helm, R., Staab, E.M. (2019)"Data on pure tin by Positron Annihilation Lifetime Spectroscopy (PALS) acquired with a semi- analog/digital setup using DDRS4PALS" *ScienceDirect.*
- [13] Pokraka, A., and Czarnecki, A. (2017) "Parapositronium can decay into three photons", *Alberta Thy* 19- 17.
- [14] PROCHAZKA, I. "Positron Annihilation Spectroscopy", *Materials Structure*, 8, 2, 55- 60, 2001.

- [15] SARRI, G., (2015) "Laser- driven generation of high- quality ultra- relativistic positron beams", Journal of Plasma Physics 81 (2).
- [16] SAYED AHMED, E. M. H. (2008) "Characterization of Control Mesoporous Glasses (CPGs) Using Positron Annihilation Lifetime Spectroscopy (PALS)", Ph.D, Martin Luther University Halle- Wittenberg.
- [17] SCHWARZ, M. et al., (2018) "Measurements of the Lifetime of Ortho positronium in the LAB- Based Liquid Scintillator of JUNO" Nuclear Inst. and Methods in Physics Research, A.
- [18] STEPANOV, S. V.- BYAKOV, V. M.- ZVEZHINSKIY, D. S. –DUPLATRE, G.- NURMUKHAMETOV, R. R. and STEPANOV, P. S (2012) "Positronium in a liquid phase: formation, bubble state and chemical reactions", *arXiv: cond- mat/1203.5390v1*, p.1- 27.
- [19] SURKO, C. M. & GREAVES, R. G. (2004) "Emerging science and technology of anti- matter plasmas and trap- based beams", Physics of Plasmas 11 (5), 2333- 2348.
- [20] YASUTAKA, F. TATSUYA, I. SIANG, K. K. MASAOKI, S. SHINICHIRO, T., "Measurement of ortho- positronium lifetime and 2γ to 3γ branching ratio of positronium", 2010, Science Faculty, Kyoto University- Translation of Japanese version 2007.