Journal of Nature, Life and Applied Sciences
Volume (3), Issue (3): 30 Sep 2019
P: 71 - 84

AJSRP
ISSN: 2522-3356

مجلة العلوم الطبيعية والحياتية والتطبيقية
المجلد (3)، العدد (3): 30 سبتمبر 2019 م
ص: 71 - 84

On Summability Of Double Fourier Series And It's Conjugate By Double Nörlund in The Space $L_2([0,\pi]\times[0,\pi])$

Mohammad Mahmud Amer

Faculty of Science || Al-Baath University || Syria

Abstract: Let f be a function of two variables u, v, periodic with respect to u and with respect to v, in each case with period 2π, and summable in the square

$Q: [-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$.

In this research we will proof two theorems.

The first study summability of the Double Fourier series

$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{m,n}A_{m,n}(u,v)$to f at point $(u,v)=(x,y)$ within a certain conditions, and we put the necessary lemmas for this theorem, and in the second we also study summability conjugate of the series:

$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[\delta_{mn}\cos mx\cos ny-\gamma_{mn}\sin mx\cos ny-\beta_{mn}\cos mx\sin ny+\alpha_{mn}\sin mx\sin ny]$

To [8]: $\bar{f}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\psi(s,t)\frac{1}{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{t}{2}}dsdt$

Where

$$\psi(x,y)=\psi(x,y;s,t)=\frac{1}{4}\{f(x+s,y+t)-f(x-s,y+t)-f(x+s,y-t)+f(x-s,y-t)\}$$

and put all necessary conditions and lemmas for this theorem by Double Nörlund summability, which considered bounded linear operator, to both theorems in the space $L_2([0,\pi]\times[0,\pi])$.

and we can get many results, the most important of which is that the simple Fourier series or double Fourier Series, its Nörlund summability to same function.

In conclusion, we can say that Double Nörlund method are general rarely, follow up many methods as cesaro double and Holder Double and et.

This method has wide applications in analysis mathematics and spicily in approximation theory.

Keywords: (N,p_m,q_n) method, Double Fourier series, double conjugate Fourier series, The space $L_2([0,\pi]\times[0,\pi])$.

جموعية متسلسلة فورييه المضاعفة ومرافقتها بطريقة نيورلند المضاعفة في الفضاء $L_2([0,\pi]\times[0,\pi])$

محمد محمود عامر

كلية العلوم || جامعة البعث || سوريا

الملخص: لتكن f دالة بالمتغيرين $u.v$ دورية بكل من u و v وقابلة للمكاملة وفق ليبيغ في المربع $Q: [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$.
سنقوم في هذا البحث بدراسة مبرهنتين، الأولى تتحدث عن جموعية متسلسلة فورييه المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{m,n}A_{m,n}(u,v)$ إلى الدالة f في النقطة $(u,v)=(x,y)$ وفق شروط معينة، مع التمهيديات اللازمة لإثبات هذه المبرهنة، والثانية تتحدث عن جموعية المتسلسلة المرافقة لمتسلسلة فورييه المضاعفة:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[\delta_{mn}\cos mx \cos ny - \gamma_{mn}\sin mx \cos ny - \beta_{mn}\cos mx \sin ny + \alpha_{mn}\sin mx \sin ny]$$

إلى الدالة: $\bar{f}(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\psi(s,t).\frac{1}{tan\frac{s}{2}tan\frac{t}{2}}dsdt$، حيث إن:

$$\psi(x,y) = \psi(x,y;s,t) = \frac{1}{4}\{f(x+s,y+t) - f(x-s,y+t) - f(x+s,y-t) + f(x-s,y-t)\}$$

كذلك وفق شروط معينة، ومع التمهيديات اللازمة لإثباتها، وذلك باستخدام طريقة نيورلند المضاعفة، والتي تعد مؤثر خطي مضاعف محدود، وذلك لكلا المبرهنتين في الفضاء $L_2([0,\pi]\times[0,\pi])$.
ويمكننا الحصول على العديد من النتائج أهمها أن كل متسلسلة من متسلسلات فورييه بسيطة كانت أم مضاعفة هي متسلسلة قابلة للجمع بطريقة نيورلند الموافقة إلى الدالة نفسها.
ونخلص إلى القول بأن طريقة نيورلند المضاعفة تعدّ طريقة عامة نوعاً ما تنتج عنها عدة طرائق مثل طريقة سيزارو المضاعفة وطريقة هولدر المضاعفة وغيرها.
كما أن لهذه الطريقة تطبيقات واسعة في مجال التحليل الرياضي وخاصة في نظرية التقريب.

الكلمات المفتاحية: الطريقة (N,p_m,q_n)، متسلسلة فورييه المضاعفة، مرافقة متسلسلة فورييه المضاعفة، الفضاء $L_2([0,\pi]\times[0,\pi])$.

المقدمة:

لدى دراسة فورييه لموضوع التوصيل الحراري عالج الكثير من المتسلسلات التي سميت باسمه حتى يومنا هذا، فقد سمح للمسألة بأن يتم تفكيكها إلى مجموعة من المسائل الأبسط بكثير، كل منها بالإمكان حلها، ومن ثم دمجها لإيجاد حل المسألة الأصلية، وسنقوم في هذا البحث بدراسة جموعية متسلسلات فورييه المضاعفة بطريقة مهمة من طرائق الجموعية ألا وهي طريقة نيورلند المضاعفة، والتي تعد حالة خاصة من الطريقة المصفوفية المضاعفة [1,2] وذلك في الفضاء $L_2([0,\pi]\times[0,\pi])$.

مشكلة البحث: من المعلوم أنه لا يوجد لمتسلسلة متباعدة نهاية بالمعنى المعتاد، وما ترمي إليه دراستنا هو إيجاد مجموع تقريبي لمتسلسلات فورييه المضاعفة، وذلك عندما تكون المتسلسلة متقاربة أو متباعدة، واقتصار الدراسات السابقة على دراسة جموعية هذا النوع من المتسلسلات في الفضاء الحقيقي $\mathbb{R}$.

كما يعدّ البحث بأنه بحث تفسيري من حيث النشاط، والمراد من هذا البحث تعميم النتائج التي تم الحصول عليها في حالة متسلسلة فورييه بمتغير واحد، إلى حالة متسلسلة فورييه بمتغيرين، من خلال إثبات مبرهنة حول قابلية جمع هذه المتسلسلة باستخدام طريقة نيورلند المضاعفة، ويجب الإشارة إلى أن طريقة نيورلند المضاعفة تطبق على المتسلسلات المضاعفة، بينما هناك طريقة مشابهة لها هي طريقة نيورلند المعممة وتطبق هذه الأخيرة على المتسلسلات البسيطة [3].

هدف البحث: نهدف من هذا البحث إلى تطبيق طريقة نيورلند المضاعفة في الجموعية، على كل من متسلسلة فوريه المضاعفة، ومرافقتها بالنسبة لكلا المتغيرين [4]، وذلك في إحدى فضاءات هيلبرت المضاعفة $L_2([0,\pi] \times [0,\pi])$.

مواد البحث وطرائقه:

يعد نوع الدراسة في هذا البحث جزء من تحليل فوريه ونظرية المتسلسلات الذي يتحدث عن جمع متسلسلات فوريه، والذي يعتمد على التفكير الاستقرائي، والمراد من هذا البحث تعميم النتائج التي تم الحصول عليها في حالة المتغير الواحد إلى حالة المتغيرين.

طريقة نيورلند (Nörlund means) $(\mathbf{N},\mathbf{p_n})$ [2]:

تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ جموعية بطريقة نيورلند (N,p_n) إلى المجموع S إذا كانت:

$\lim_{n\to\infty} t_n = S$، حيث إن: $S_k = \sum_{n=0}^{k} u_n$ ، $t_n = \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}.S_k$، وحيث:

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

و$\{p_n\}$ هي متتالية من الثوابت الحقيقية أو العقدية.

(أو نقول إن المتسلسلة$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع (N,p_n) إلى المجموع S).

ونكتب عندئذٍ: $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S\ (N,p_n)$.

تعريف [5]:

نقول عن طريقة في قابلية الجمع إنها نظامية إذا أدى تطبيقها على متسلسلة متقاربة إلى مجموع هذه المتسلسلة المعتاد.

طريقة نيورلند المضاعفة $(\mathbf{N},\mathbf{p_m},\mathbf{q_n})$ [6]:

لتكن p_m, q_n متتاليتين من الثوابت الحقيقية أو العقدية، وبحيث يكون:

$$P_m = p_0 + p_1 + \cdots + p_m\ , Q_n = q_0 + q_1 + \cdots + q_n$$

ولتكن $S_{m,n}$ متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة المضاعفة: $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$

عندئذ تكون هذه المتسلسلة جموعية إلى المجموع A بطريقة نيورلند (N,p_m,q_n) إذا تحقق مايلي:

$\lim_{m\to\infty,n\to\infty} t_{m,n} = A$، حيث إن: $t_{m,n} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\frac{p_{m-i}.q_{n-j}.S_{i,j}}{P_m.Q_n}$.

ونكتب عندئذ: $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n} = A\ (N,p_m,q_n)$.

الشروط النظامية للجموعية (لقابلية الجمع) بطريقة نيورلند المضاعفة:

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\frac{p_{m-i}.q_{n-j}}{P_m.Q_n} \to 1\ ; m\to\infty, n\to\infty$$

$$\lim_{m,n}\sum_{j=0}^{n}\left|\frac{p_{m-i}.q_{n-j}}{P_m.Q_n}\right| = 0\ ; \forall i = 1,2,\ldots.$$

$$\lim_{m,n}\sum_{i=0}^{m}\left|\frac{p_{m-i}.q_{n-j}}{P_m.Q_n}\right| = 0\ ; \forall j = 1,2,\ldots.$$

ملاحظة: يمكن تعريف (O-الكبيرة) (Big-Oh) و(o-الصغيرة) (Little-Oh) كما يلي:

لتكن لدينا الدالة: $f: X \to Y$، حيث إن: X، Y مجموعتان من الأعداد الحقيقية، عندئذٍ من[7] نجد:

$$O(f) = \{\ g: X\to Y\ ;\ \exists\ x_0, c>0; \forall x \ge x_0 \Longrightarrow cf(x) \ge g(x) \ge 0\ \}$$

ونكتب: $g = O(f)$ أو $g \in O(f)$.

$$o(f) = \{\, g: X \to Y \;;\; \forall\, c > 0 \exists x_0 > 0; \forall x \geq x_0 \Longrightarrow cf(x) > g(x) \geq 0\}$$

ونكتب: $g = o(f)$ أو $g \in o(f)$.

متسلسلة فورييه البسيطة:

لتكن f دالة دورية دورها 2π، وقابلة للمكاملة وفق ليبيغ على المجال $[-\pi, \pi]$، عندئذٍ فإن متسلسلة فورييه لهذه الدالة تعطى بالشكل [8]:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \;\ldots (1)$$

حيث:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt \;,\; b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt$$

المتسلسلة المرافقة لمتسلسلة فورييه البسيطة:

إن المتسلسلة المرافقة للمتسلسلة (1) تعطى بالشكل [3,4,8,10]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nt - b_n \cos nt) \;\ldots (2)$$

متسلسلة فورييه المضاعفة (متسلسلة فورييه بمتغيرين) [1,4,9,12]:

لتكن f دالة دورية دورها 2π وذلك بالنسبة لكل من u وv، وقابلة للمكاملة وفق ليبيغ في المربع: $Q: [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.

عندئذٍ تعطى متسلسلة فورييه المضاعفة لهذه الدالة بالعلاقة:

$$f(u, v) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} \big[\alpha_{m,n} \cos mu \cos nv + \beta_{m,n} \sin mu \cos nv + \gamma_{m,n} \cos mu \sin nv + \delta_{m,n} \sin mu \sin nv\big]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} A_{m,n}(u, v) \;\ldots (3)$$

حيث:

$$\lambda_{0,0} = \frac{1}{4}, \lambda_{m,0} = \frac{1}{2}; m > 0, \lambda_{0,n} = \frac{1}{2} \;; n > 0, \lambda_{m,n} = 1 \;; m, n > 0$$

ومعاملات متسلسلة فورييه بمتغيرين لها الشكل الآتي:

$$\alpha_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \iint_Q f(u, v) \cos mu \cos nv\, dudv \;; m, n = 0,1,2, \ldots.$$

$$\beta_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \iint_Q f(u, v) \sin mu \cos nv\, dudv \;; m, n = 0,1,2, \ldots.$$

$$\gamma_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \iint_Q f(u, v) \cos mu \sin nv\, dudv \;; m, n = 0,1,2, \ldots.$$

$$\delta_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \iint_Q f(u, v) \sin mu \sin nv\, dudv \;; m, n = 0,1,2, \ldots.$$

وتسمى هذه العلاقات علاقات أولر.

حيث إن Q يدل على المربع الأساسي $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.

وإذا لم تحقق الثوابت: $\alpha_{m,n}$، $\beta_{m,n}$، $\gamma_{m,n}$، $\delta_{m,n}$ هذه العلاقات، تسمى المتسلسلة السابقة متسلسلة مثلثاتية ليست متسلسلة فورييه.

أو نكتب متسلسلة فورييه المضاعفة: هي متسلسلة مثلثاتية تعطى بالشكل (3)، وتحقق أمثالها علاقات أولر.

وتنتج متسلسلة فورييه المضاعفة عن ضرب متسلسلتي فورييه البسيطة ببعضها بعضاً، بحيث تتبع الأول فيها للمتغير x، والثانية تتبع للمتغير y.

المتسلسلة المرافقة لمتسلسلة فورييه المضاعفة [4]:

إن لمتسلسلة فورييه المضاعفة ثلاث متسلسلات مرافقة تعطى بالأشكال الثلاث الآتية:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{m,n}\left[-\beta_{m,n}\cos mu\cos nv+\alpha_{m,n}\sin mu\cos nv-\delta_{m,n}\cos mu\sin nv+\delta_{m,n}\sin mu\sin nv\right]\ \dots (4)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{m,n}\left[-\gamma_{m,n}\cos mu\cos nv-\delta_{m,n}\sin mu\cos nv+\alpha_{m,n}\cos mu\sin nv+\beta_{m,n}\sin mu\sin nv\right]\ \dots (5)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\delta_{m,n}\cos mu\cos nv-\gamma_{m,n}\sin mu\cos nv-\beta_{m,n}\cos mu\sin nv+\alpha_{m,n}\sin mu\sin nv\right]\ \dots (6)$$

إن الدوال المرافقة $\bar{f}^{(1)}$ و $\bar{f}^{(2)}$ و $\bar{f}^{(3)}$ بـ u و v، المقابلة للأشكال الثاني والثالث والرابع تعطى بالعلاقات الآتية [8]:

$$\bar{f}^{(1)}(u,v)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(u+s,v)-f(u-s,v)}{2\tan\frac{s}{2}}ds$$

$$\bar{f}^{(2)}(u,v)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(u,v+t)-f(u,v-t)}{2\tan\frac{t}{2}}dt$$

$$\bar{f}^{(3)}(u,v)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(u+s,v+t)-f(u-s,v+t)-f(u+s,v-t)+f(u-s,v-t)}{2\tan\frac{s}{2}.2\tan\frac{t}{2}}dsdt$$

سنقوم في دراستنا هذه بوضع مبرهنة حول الجموعية بطريقة نيورلند المضاعفة للمتسلسلة المرافقة لمتسلسلة فورييه المضاعفة بشكلها الثالث (6).

الفضاء $L_2([0,\pi]\times[0,\pi])$:هو مجموعة كل الدوال المضاعفة (بمتغيرين) المعرفة والقيوسة على المربع $[0,\pi]\times[0,\pi]$ والتي تحقق الشرط: $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}|f(u,v)|^2dudv<\infty$.

ويعرف النظيم في هذا الفضاء بالشكل [11]:

$$\|f(x,y)\|_{L_2([0,\pi]\times[0,\pi])}=\left(\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}|f(x,y)|^2dxdy\right)^{\frac{1}{2}}$$

النتائج:

جموعية متسلسلة فورييه المضاعفة وإحدى مرافقاتها بطريقة نيورلند المضاعفة:

لتكن f دالة دورية دورها 2π وذلك بالنسبة لكل من u و v، وقابلة للمكاملة وفق ليبيغ في المربع $Q:[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$.

لنكتب [12]:

$$\phi(x,y)=\phi(u,v;x,y)$$

$$=\frac{1}{4}[f(u+x,v+y)+f(u+x,v-y)+f(u-x,v+y)+f(u-x,v-y)-4f(x,y)]$$

$$\Phi(x,y)=\int_0^{x}\int_0^{y}\left|\phi(s,t)\right|dsdt$$

$\tau = \left[\frac{1}{t}\right]$ دالة الجزء الصحيح لـ $\frac{1}{t}$، $\sigma = \left[\frac{1}{s}\right]$ دالة الجزء الصحيح لـ $\frac{1}{s}$

$$M_m(x) = \frac{1}{\pi P_m}\sum_{k=0}^{m} p_k \frac{\sin\left(m-k+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\ ,\ N_n(y) = \frac{1}{\pi Q_n}\sum_{k=0}^{n} q_k \frac{\sin\left(n-k+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{y}{2}}$$

$$\overline{M}_m(x) = \frac{1}{\pi P_m}\sum_{k=0}^{m} p_k \frac{\cos\left(m-k+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\ ,\ \overline{N}_n(y) = \frac{1}{\pi Q_n}\sum_{k=0}^{n} q_k \frac{\cos\left(n-k+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{y}{2}}$$

تمهيديات[6,9]:

لإثبات المبرهنتين تلزمنا التمهيديات الآتية:

تمهيدية 1: إذ اكانت $\{p_m\}$ متتالية غير سالبة ومتناقصة، عندئذٍ:

من أجل $0 \le a < b < \infty\ ,\ 0 < x \le \pi$، ومن أجل أي عدد صحيح موجب m، يكون:

$$\left|\sum_{k=a}^{b} p_k.\, e^{i(m-k)x}\right| \le AP_{\left[\frac{1}{x}\right]}\ ;\ A = \text{constant}$$

تمهيدية 2: إذا كانت $\{q_n\}$ متتالية غير سالبة ومتناقصة، عندئذٍ:

من أجل $0 \le a < b < \infty\ ,\ 0 < x \le \pi$، ومن أجل أي عدد صحيح موجب n، يكون:

$$\left|\sum_{k=a}^{b} p_k.\, e^{i(n-k)y}\right| \le AQ_{\left[\frac{1}{y}\right]}\ ;\ A = \text{constant}$$

وبالإعتماد على التمهيديتين السابقتين تم إثبات التمهيديتين الآتيتين [6,9]:

تمهيدية 3: إذاكانت $\{p_m\}$ متتالية غير سالبة ومتناقصة، عندئذٍ:

من أجل $0 \le a < b < \infty\ ,\ 0 < x \le \pi$، ومن أجل أي عدد صحيح موجب m، يكون:

$$\left|\sum_{k=a}^{b} p_k.\frac{\sin\left(m-k+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\right| = O\left\{\frac{P_\sigma}{x}\right\}\ ;\ \sigma = \left[\frac{1}{x}\right]$$

$$\left|\sum_{k=a}^{b} p_k.\frac{\cos\left(m-k+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\right| = O\left\{\frac{P_\sigma}{x}\right\}\ ;\ \sigma = \left[\frac{1}{x}\right]$$

تمهيدية 4: إذاكانت $\{q_n\}$ متتالية غير سالبة ومتناقصة، عندئذٍ:

من أجل $0 \le a < b < \infty\ ,\ 0 < y \le \pi$، ومن أجل أي عدد صحيح موجب n، يكون:

$$\left|\sum_{k=a}^{b} q_k.\frac{\sin\left(n-k+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{1}{2}y}\right| = O\left\{\frac{Q_\tau}{y}\right\}\ ;\ \tau = \left[\frac{1}{y}\right]$$

$$\left|\sum_{k=a}^{b} q_k.\frac{\cos\left(n-k+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{1}{2}y}\right| = O\left\{\frac{Q_\tau}{y}\right\}\ ;\ \tau = \left[\frac{1}{y}\right]$$

ملاحظة: تم استخدام التمهيديتين (3) و (4) في إثبات المبرهنتين (1) و(2).

مبرهنة(1):

لتكن (N, p_m, q_n) طريقة نيورلند النظامية، ولتكن المتتاليتين $\{p_m\}$ و $\{q_n\}$

حقيقيتين غير سالبتين ومتناقصتين بحيث: $P_m \to \infty$ و $Q_n \to \infty$.

عندئذ إذا كان: $\Phi(x, y) = \int_0^x \int_0^y |\phi(s,t)| ds dt = o\left(\frac{p_{\left[\frac{1}{x}\right]}}{P_{\left[\frac{1}{x}\right]}}.\frac{q_{\left[\frac{1}{y}\right]}}{Q_{\left[\frac{1}{y}\right]}}\right)$.

فإن متسلسلة فورييه المضاعفة جموعية إلى الدالة $f(x,y)$ بطريقة نيورلند المضاعفة في الفضاء $L_2([0,\pi]\times[0,\pi])$.

إثبات المبرهنة:

إن متتالية المجاميع الجزئية $s_{j,k}(x,y)$ لمتسلسلة فورييه المضاعفة في النقطة $(u,v)=(x,y)$ تعطى بالعلاقة:

$$s_{j,k}(x,y)=f(x,y)+\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\phi(x,y)\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{y}{2}}dxdy$$

وذلك لأن:

$$s_{j,k}(x,y)=\sum_{i=0}^{j}\sum_{l=0}^{k}\lambda_{i,l}\begin{Bmatrix}\alpha_{i,l}\cos ix\cos ly+\beta_{i,l}\sin ix\cos ly\\ +\gamma_{i,l}\cos ix\sin ly+\delta_{i,l}\sin ix\sin ly\end{Bmatrix}$$

$$=\sum_{i=0}^{j}\sum_{l=0}^{k}\lambda_{i,l}.\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t)\times$$

$$\begin{Bmatrix}\cos is\cos lt\,.\cos ix\cos ly\\ +\sin is\cos lt\,.\sin ix\cos ly+\cos is\sin lt\,.\cos ix\sin ly\\ +\sin is\sin lt\,.\sin ix\sin ly\end{Bmatrix}dsdt$$

$$=\sum_{i=0}^{j}\sum_{l=0}^{k}\lambda_{i,l}.\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t)\times$$

$$\{\cos lt\,.\cos ly\,.(\cos is\,.\cos ix+\sin is\,.\sin ix)$$
$$+\sin lt\,.\sin ly\,.(\cos is\,.\cos ix+\sin is\,.\sin ix)\}dsdt$$

$$=\sum_{i=0}^{j}\sum_{l=0}^{k}\lambda_{i,l}.\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t)\times\{\cos i(s-x)\,.\cos l(t-y)\}dsdt$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t)\sum_{i=0}^{j}\sum_{l=0}^{k}\lambda_{i,l}.\cos i(s-x)\,.\cos l(t-y)\,dsdt$$

بمراعاة الحالات التي تأخذها قيم $\lambda_{i,l}$:

$$\lambda_{0,0}=\frac{1}{4}\,,\lambda_{i,0}=\frac{1}{2};i>0\,,\lambda_{0,l}=\frac{1}{2}\;;l>0\,,\lambda_{i,l}=1\;;i,l>0$$

$$s_{j,k}(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t)\,.\left(\frac{1}{4}\right).1.1.\,dsdt\;;i=l=0$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t)\,.\left(\frac{1}{2}\right).1.\sum_{l=1}^{k}\cos l(t-y)\,dsdt\;;i=0,l>0$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t)\,.\left(\frac{1}{2}\right).\sum_{i=1}^{j}\cos i(s-x)\,.1.\,dsdt\;;i=0,l>0$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t)\,.(1).\sum_{i=1}^{j}\cos i(s-x)\,.\sum_{l=1}^{k}\cos l(t-y)\,dsdt$$
$$;i>0,l>0$$

الآن:

$$s_{j,k}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t)\,dsdt$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t)\,.\left(\sum_{l=1}^{k}\cos l(t-y)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)dsdt$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t)\,.\left(\sum_{i=1}^{j}\cos i(s-x)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)dsdt$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t)\times$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{j}\cos i(s-x)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right).\left(\sum_{l=1}^{k}\cos l(t-y)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)dsdt$$

ومنه فإن:

$$s_{j,k}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t)\,dsdt$$
$$+\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t).\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(t-y)}{2\sin\frac{t-y}{2}}dsdt-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t)\,dsdt$$
$$+\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t).\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)(s-x)}{2\sin\frac{s-x}{2}}dsdt-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t)\,dsdt$$
$$+\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t).\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)(s-x)}{2\sin\frac{s-x}{2}}.\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(t-y)}{2\sin\frac{t-y}{2}}dsdt$$
$$-\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t).\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)(s-x)}{2\sin\frac{s-x}{2}}dsdt$$
$$-\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t).\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(t-y)}{2\sin\frac{t-y}{2}}dsdt+\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t)\,dsdt$$

وبالتالي فإن: $s_{j,k}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s,t).\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)(s-x)}{\sin\frac{s-x}{2}}.\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(t-y)}{\sin\frac{t-y}{2}}dsdt$

نبدل كل s بـ u وكل بـ v، نجد:

$$s_{j,k}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u,v).\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)(u-x)}{\sin\frac{u-x}{2}}.\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(v-y)}{\sin\frac{v-y}{2}}dudv$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u,v).\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)(x-u)}{\sin\frac{x-u}{2}}.\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(y-v)}{\sin\frac{y-v}{2}}dudv$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\left\{\int_{-\pi}^{0}\int_{-\pi}^{0}+\int_{-\pi}^{0}\int_{0}^{\pi}+\int_{0}^{\pi}\int_{-\pi}^{0}+\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\right\}f(u,v)\times$$
$$\times\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)(x-u)}{\sin\frac{x-u}{2}}.\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(y-v)}{\sin\frac{y-v}{2}}dudv$$
$$=H_1+H_2+H_3+H_4$$

نبدل في H_1: $x-s=u\,,y-t=v$ وفي H_2: $x-s=u\,,y+t=v$

وفي H_3: $x+s=u\,,y-t=v$ وفي H_4: $x+s=u\,,y+t=v$

$$s_{j,k}(x,y)\ \frac{1}{4\pi^2}\int_{x+\pi}^{x}\int_{y+\pi}^{y}f(x-s,y-t)\times\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\frac{s}{2}}.\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}(-ds)(-dt)$$
$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{x+\pi}^{x}\int_{-y}^{\pi-y}f(x-s,y+t)\times\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\frac{s}{2}}.\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}(-ds)dt$$
$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{-x}^{\pi-x}\int_{y+\pi}^{y}f(x+s,y-t)\times\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\frac{s}{2}}.\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}ds(-dt)$$
$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{-x}^{\pi-x}\int_{-y}^{\pi-y}f(x+s,y+t)\times\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\frac{s}{2}}.\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dsdt$$

بالاستفادة من كون f دالة دورية بالنسبة لـ x وy ودورها 2π، وبالاعتماد على نتيجة سابقة، نجد أن:

$$s_{j,k}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\begin{Bmatrix} f(x+s,y+t)+f(x+s,y-t) \\ +f(x-s,y+t)+f(x-s,y-t)\end{Bmatrix}\times$$
$$\times\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\frac{s}{2}}.\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dsdt$$

لدينا:

$$\phi(s,t)=\phi(x,y;s,t)$$
$$=\frac{1}{4}\{f(x+s,y+t)+f(x+s,y-t)+f(x-s,y+t)+f(x-s,y-t)-4f(x,y)\}$$

وبالتالي فإن:

$$f(x+s,y+t)+f(x+s,y-t)+f(x-s,y+t)+f(x-s,y-t)=4\phi(s,t)+4f(x,y)$$

ومنه فإن متتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة فوريبه المضاعفة تاخذ الشكل:

$$s_{j,k}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\{4\phi(s,t)+4f(x,y)\}\times\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\frac{s}{2}}.\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dsdt$$

$$\Longrightarrow s_{j,k}(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\phi(s,t).\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\frac{s}{2}}.\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dsdt$$
$$+\frac{1}{\pi^2}f(x,y).\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\frac{s}{2}}ds.\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dt$$

لكن: $\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\frac{\pi}{2}$، حيث إن:

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\right\}=\sum_{k=0}^{n}\{D_k(t)\}$$
$$=F_n(t)=\frac{\sin^2(n+1)\left(\frac{1}{2}t\right)}{2\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

وحيث: $\sum_{k=0}^{n}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t=\frac{1-\cos(n+1)t}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{\sin^2(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$

وتسمى الدالة $D_n(t)$ نواة ديرخليه، بينما تسمى الدالة $F_n(t)$ نواة فيجر.

وتحقق هاتان الدالتان ما يأتي: [5,39]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)\,dt=1\,,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(t)\,dt=n+1$$

وبالتالي فإن:

$$s_{j,k}(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\phi(s,t).\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\frac{s}{2}}.\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dsdt+\frac{1}{\pi^2}f(x,y).\pi.\pi$$

أي إن:

$$s_{j,k}(x,y)-f(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\phi(s,t)\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\frac{s}{2}}.\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dsdt$$

ويمكننا أن نكتب:

$$s_{j,k}(x,y)-f(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\phi(x,y)\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}.\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{y}{2}}dxdy$$

عندئذٍ:

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{p_{m-i}.q_{n-j}}{P_m.Q_n}\left\{s_{j,k}(x,y)-f(x,y)\right\}=$$

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\phi(x,y)\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\frac{p_{m-i}.q_{n-j}}{P_m.Q_n}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{y}{2}}dxdy$$

أو: $t_{m,n}^{(N,p_m,q_n)}(x,y)-f(x,y)=\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\phi(x,y)M_m(x)N_n(y)dxdy$

حيث إن: $\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{p_{m-i}.q_{n-j}}{P_m.Q_n}f(x,y)=f(x,y)\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{p_{m-i}.q_{n-j}}{P_m.Q_n}=f(x,y)$

وذلك لأن: $\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{p_{m-i}.q_{n-j}}{P_m.Q_n}=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{p_i.q_j}{P_m.Q_n}=\sum_{j=0}^{m}\frac{p_i}{P_m}\sum_{k=0}^{n}\frac{q_j}{Q_n}=1$

الآن إذا أثبتنا أن:

$$\left\|t_{m,n}^{(N,p_m,q_n)}(x,y)-f(x,y)\right\|_{L_2([0,\pi]\times[0,\pi])}=\left(\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\left|t_{m,n}^{(N,p_m,q_n)}(x,y)-f(x,y)\right|^2dxdy\right)^{\frac{1}{2}}=o(1)\ ;$$

$$m\to\infty,n\to\infty$$

يتم المطلوب.

لدينا:

$$t_{m,n}^{(N,p_m,q_n)}(x,y)-f(x,y)=$$

$$\left\|t_{m,n}^{(N,p_m,q_n)}(x,y)-f(x,y)\right\|_{L_2([0,\pi]\times[0,\pi])}$$

$$=\left(\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\left|\left(\int_0^{\frac{1}{m}}\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi}+\int_{\delta}^{\pi}\int_{\xi}^{\pi}\right)\phi(x,y)M_m(x)N_n(y)dxdy\right|^2dxdy\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}|R_1+R_2+R_3|^2dxdy\right)^{\frac{1}{2}}$$

لدينا:

$$R_1=O(mn)\int_0^{\frac{1}{m}}\int_0^{\frac{1}{n}}\left|\phi(x,y)\right|dsdt=o(mn)\Phi\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$$

$$=o\left(\frac{mp_m}{P_m}.\frac{nq_n}{Q_n}\right)=o(1)\ ;m\to\infty,n\to\infty$$

الآن بالاستفادة من التمهيدية (3) نحصل على:

$$R_2=O\left\{\frac{1}{P_m.Q_n}\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi}\left|\phi(x,y)\right|\frac{P_{\left[\frac{1}{x}\right]}}{x}\frac{Q_{\left[\frac{1}{y}\right]}}{y}dxdy\right\}$$

$$= O\left\{\frac{1}{P_m.Q_n}\left(\phi(x,y)\frac{P_{\left[\frac{1}{x}\right]}}{x}\frac{Q_{\left[\frac{1}{y}\right]}}{y}\right)_{\frac{1}{m},\frac{1}{n}}^{\delta,\xi}+\frac{1}{P_m.Q_n}\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi}\phi(x,y)\frac{P_{\left[\frac{1}{x}\right]}}{x^2}\frac{Q_{\left[\frac{1}{y}\right]}}{y^2}dxdy+o(1)\right\}$$

$$= o(1)+\frac{1}{P_m.Q_n}\left\{o\left(\frac{p_{\left[\frac{1}{x}\right]}q_{\left[\frac{1}{y}\right]}}{P_{\left[\frac{1}{x}\right]}.Q_{\left[\frac{1}{y}\right]}}\right)\frac{P_{\left[\frac{1}{x}\right]}}{x}\frac{Q_{\left[\frac{1}{y}\right]}}{y}\right\}_{\frac{1}{m},\frac{1}{n}}^{\delta,\xi}+o\left\{\frac{1}{P_m.Q_n}\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi}\frac{p_{\left[\frac{1}{x}\right]}}{x^2}\frac{q_{\left[\frac{1}{y}\right]}}{y^2}dxdy\right\}=$$

$$o(1)+o\left\{\frac{1}{P_m.Q_n}\int_{\frac{1}{\delta}}^{m}\int_{\frac{1}{\xi}}^{n}p_{[u]}.\,q_{[v]}dudv\right\}=o(1)$$

ومن الشروط النظامية لطريقة نيورلند المضاعفة (حيث نعتبر طريقة نيورلند المضاعفة نظامية في هذا البحث) ومبرهنة ريمان-ليبيغ، يكون لدينا:

$$R_3=o(1);\, m\to\infty, n\to\infty$$

$$\left\|t_{m,n}^{(N,p_m,q_n)}(x,y)-f(x,y)\right\|_{L_2([0,\pi]\times[0,\pi])}=\left(\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}|o(1)|^2dxdy\right)^{\frac{1}{2}}=o(1)\;;$$

$$m\to\infty, n\to\infty$$

بهذا الشكل يكتمل إثبات المبرهنة.

قابلية جمع المتسلسلة المرافقة لمتسلسلة فورييه المضاعفة بالطريقة المصفوفية المضاعفة:

سوف نأخذ متتالية المجاميع الجزئية للشكل الثالث للمتسلسلة المرافقة لمتسلسلة فورييه المضاعفة والمعطاة بالعلاقة [4]:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\{\delta_{mn}\cos mx\cos ny-\gamma_{mn}\sin mx\cos ny-\beta_{mn}\cos mx\sin ny+\alpha_{mn}\sin mx\sin ny\}\ \dots(*)$$

لنكتب:

$$\psi(x,y)=\psi(x,y;s,t)$$

$$=\frac{1}{4}\{f(x+s,y+t)-f(x-s,y+t)-f(x+s,y-t)+f(x-s,y-t)\}$$

$$\Psi(x,y)=\int_0^x\int_0^y|\psi(s,t)|dsdt$$

$\tau=\left[\frac{1}{t}\right]$ دالة الجزء الصحيح لـ $\frac{1}{t}$، $\sigma=\left[\frac{1}{s}\right]$ دالة الجزء الصحيح لـ $\frac{1}{s}$

$$\overline{M}_m(x)=\frac{1}{\pi P_m}\sum_{k=0}^{m}p_k\frac{\cos\left(m-k+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\ ,\overline{N}_n(y)=\frac{1}{\pi Q_n}\sum_{k=0}^{n}q_k\frac{\cos\left(n-k+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{y}{2}}$$

ولنفرض أن طريقة نيورلند المضاعفة تحقق الشروط النظامية.

مبرهنة(2):

لتكن طريقة نيورلند (N,p_m,q_n) نظامية، ولتكن المتتاليتين $\{p_m\}$ و$\{q_n\}$ حقيقيتين غير سالبتين ومتناقصتين بحيث: $P_m\to\infty$ و$Q_n\to\infty$.

عندئذ إذا كان: $\left(\frac{p_{\left[\frac{1}{x}\right]}}{P_{\left[\frac{1}{x}\right]}}.\frac{q_{\left[\frac{1}{y}\right]}}{Q_{\left[\frac{1}{y}\right]}}\right)\Psi(x,y)=\int_0^x\int_0^y|\psi(s,t)|dsdt=o$.

فإن المتسلسلة المرافقة لمتسلسلة فوريه المضاعفة المعرفة بالعلاقة(*) تكون جموعية بطريقة نيورلند المضاعفة إلى الدالة: $\bar{f}(x,y)$ والتي تأخذ الشكل: $\bar{f}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi\psi(s,t).\frac{1}{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{t}{2}}dsdt$.

في الفضاء $L_2([0,\pi]\times[0,\pi])$ بحيث تكون التكاملات السابقة موجودة.

إثبات المبرهنة(2):

تعطى متتالية المجاميع الجزئية $\bar{s}_{j,k}(x,y)$ للمتسلسلة المرافقة(*) لمتسلسلة فوريه المضاعفة بالعلاقة [8]: $\bar{s}_{j,k}(x,y)=\bar{f}(x,y)+\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi\psi(s,t)\frac{\cos\left(j+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\frac{s}{2}}\frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dsdt$.

عندئذٍ:

$$\sum_{j=0}^m\sum_{k=0}^n\frac{p_{m-i}.q_{n-j}}{P_m.Q_n}\left\{\bar{s}_{j,k}(x,y)-\bar{f}(x,y)\right\}=$$

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi\psi(x,y)\sum_{i=0}^m\sum_{j=0}^n\frac{p_{m-i}.q_{n-j}}{P_m.Q_n}.\frac{\cos\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}.\frac{\cos\left(j+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{y}{2}}dxdy$$

أو: $\bar{t}_{m,n}^{(N,p_m,q_n)}(x,y)-\bar{f}(x,y)=\int_0^\pi\int_0^\pi\psi(x,y)\bar{M}_m(x)\bar{N}_n(y)dxdy$

إذا أثبتنا أن:

$$\left\|\bar{t}_{m,n}^{(N,p_m,q_n)}(x,y)-\bar{f}(x,y)\right\|_{L_2([0,\pi]\times[0,\pi])}=$$

$$=\left(\int_0^\pi\int_0^\pi\left|\bar{t}_{m,n}^{(N,p_m,q_n)}(x,y)-\bar{f}(x,y)\right|^2dxdy\right)^{\frac{1}{2}}=o(1)\,;m\to\infty,n\to\infty$$

يتم المطلوب.

لدينا:

$$\left\|\bar{t}_{m,n}^{(N,p_m,q_n)}(x,y)-\bar{f}(x,y)\right\|_{L_2([0,\pi]\times[0,\pi])}=$$

$$\left(\int_0^\pi\int_0^\pi\left|\left(\int_0^{\frac{1}{m}}\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi}+\int_\delta^\pi\int_\xi^\pi\right)\psi(x,y)\bar{M}_m(x)\bar{N}_n(y)dxdy\right|^2dxdy\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\int_0^\pi\int_0^\pi|\bar{R}_1+\bar{R}_2+\bar{R}_3|^2dxdy\right)^{\frac{1}{2}}$$

لدينا: $\bar{R}_1=O(mn)\int_0^{\frac{1}{m}}\int_0^{\frac{1}{n}}|\psi(x,y)|dsdt=o(mn)\Psi\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$.

ومنه: $\bar{R}_1=o\left(\frac{mp_m}{P_m}.\frac{nq_n}{Q_n}\right)=o(1)\,;(m\to\infty,n\to\infty)$.

الآن: $\bar{R}_2=O\left\{\frac{1}{P_m.Q_n}\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi}|\psi(x,y)|\frac{P_{\left[\frac{1}{x}\right]}}{x}\frac{Q_{\left[\frac{1}{y}\right]}}{y}dxdy\right\}$.

وذلك حسب التمهيدية (4).

$$= O\left\{\frac{1}{P_m.Q_n}\left(\psi(x,y)\frac{P_{\left[\frac{1}{x}\right]}}{x}\frac{Q_{\left[\frac{1}{y}\right]}}{y}\right)_{\frac{1}{m},\frac{1}{n}}^{\delta,\xi}+\frac{1}{P_m.Q_n}\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi}\psi(x,y)\frac{P_{\left[\frac{1}{x}\right]}}{x^2}\frac{Q_{\left[\frac{1}{y}\right]}}{y^2}dxdy+o(1)\right\}$$

$$= o(1)+\frac{1}{P_m.Q_n}\left\{o\left(\frac{p_{\left[\frac{1}{x}\right]}}{P_{\left[\frac{1}{x}\right]}}\cdot\frac{q_{\left[\frac{1}{y}\right]}}{Q_{\left[\frac{1}{y}\right]}}\right)\frac{P_{\left[\frac{1}{x}\right]}}{x}\frac{Q_{\left[\frac{1}{y}\right]}}{y}\right\}_{\frac{1}{m},\frac{1}{n}}^{\delta,\xi}+o\left\{\frac{1}{P_m.Q_n}\int_{\frac{1}{m}}^{\delta}\int_{\frac{1}{n}}^{\xi}\frac{p_{\left[\frac{1}{x}\right]}}{x^2}\frac{q_{\left[\frac{1}{y}\right]}}{y^2}dxdy\right\}= o(1)+o\left\{\frac{1}{P_m.Q_n}\int_{\frac{1}{\delta}}^{m}\int_{\frac{1}{\xi}}^{n}p_{[u]}.q_{[v]}dudv\right\}=o(1)$$

من شروط النظامية لطريقة نيورلند المضاعفة ومبرهنة ريمان-ليبيغ، يكون لدينا:

$$\bar{R}_3 = o(1)\ ;\ (m \to \infty, n \to \infty)$$

لذلك فإنه ومن الحسابات المذكورة أعلاه يكون قد تم إثبات المبرهنة.

الخلاصة:

في هذا البحث قمنا بدراسة جموعية متسلسلة فورييه المضاعفة والمتسلسلة المرافقة لها بالنسبة للمتغيرين x وy، بطريقة نيورلند المضاعفة (N, p_m, q_n) وذلك في الفضاء $L_2([0,\pi]\times[0,\pi])$.

التوصيات:

يمكننا دراسة متسلسلات فورييه المضاعفة في فضاءات تابعية أخرى، كما يمكننا أيضاً دراسة المرافقات الأخرى لمتسلسلة فورييه المضاعفة، في الفضاء السابق نفسه، إضافة لدراسة متسلسلات فورييه الثلاثية بطريقة نيورلند الثلاثية وهكذا.

قائمة المراجع:

1- Lal. S, Tripathi. V. N, " On The Study Of Double Fourier Series By Double Matrix Summability Method ", *Tamkang Journal Of Mathematics*, Vol 34, No 1, 1-16, (2003).

2- Lal. S, Singh. H. P, " Double Matrix Summability Of Double Fourier Series ", *Int. Journal of Math. Analysis*, Vol 3, No 34, 1669-1681, (2009).

3- Mishra. V. N, Sonavane. V, " Error Bounds Of Conjugate Of A Periodic Signal By Almost Generalized Nörlund Means ", (2015).

4- Nigam. H. K, Sharma. K, " On Double Summability Of Double Conjugate Fourier Series ", *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 1-15, (2012).

5- Padhy. B. P, Mallik. B, Misra. U. K, Misrapaikray. M, Misra. U, " On Product Summability Of Fourier Series Using Matrix Euler Method ", 3, 191-195, (2012).

6- Pandy. G. S, " On The Nörlund Summability Of Fourier Series " (1976).

7- Rosenberg. B, "Asymptotic Order Notation ", 10, 1-6, (2007).

8- Saxena. K, Prabhakar. M, " A Study Of Double Euler Summability Method Of Fourier Series And Its Conjugate Series ", 46-52, (2016).

9- Tripathi. L. M, Singh. A. P, " A Study Of Double Fourier Series By Nörlund Summability ", (1981).

10- عامر. محمد، " أطروحة دكتوراه بعنوان جمع متسلسلات فوريه المثلثية ومرافقاتها من الدرجة الأولى والثانية بطريقة نيورلند في الفضائين CوL "، (1990-1991).

11- عامر. محمد، " دراسة في قابلية جمع متسلسلة فوريه ومرافقتها بالطريقة $(E,1).(C,1)$ في الفضاء $L_2[0,\pi]$ "، *مجلة جامعة دمشق*، مجلد 33، عدد 2، 1- 23، (2017).

12- كرزون. عبد الهادي، عامر. محمد، " قابلية جمع متسلسلة فوريه المضاعفة بالطريقة $(N,p,q,\acute{p},\acute{q})(E,1,1)$ "، *المجلة العربية للعلوم ونشر الأبحاث – مجلة العلوم الطبيعية والحياتية والتطبيقية*، المجلد 2، العدد 4، 24-39، (2018).