

## A Kinetic and Kinematic Study for Plane Pantograph Machine

Ahmad Hatem Taj Al Deen Abo Hatem

Mustafa Rafeek Hasan

Faculty of Science || Al-Baath University || Syria

**Abstract:** The plane pantograph machine is considered as a significant one which has its own missions including figures copying, sculptural and minting works, and geometric properties such homothety.

Moreover, achieving simple mathematical operations such determining the midpoint of a straight line segment with knowing its end points, adding two complex numbers,.. etc.

Then, we found a new type of pantograph machine which can make many copies for some figures desired to copied with different magnification factors.

Because of the importance of this machine we liked to kinetic and kinematic study about this machine then determining plane domain which this machine can work in and distinguishing two basic positions for this machine.

**Keywords:** Plane pantograph machine – geometric properties – Mathematical operations.

### دراسة حركية وتحريكية لآلة رسم الخرائط المستوية

مصطفى رفيق حسن

أحمد حاتم تاج الدين أبو حاتم

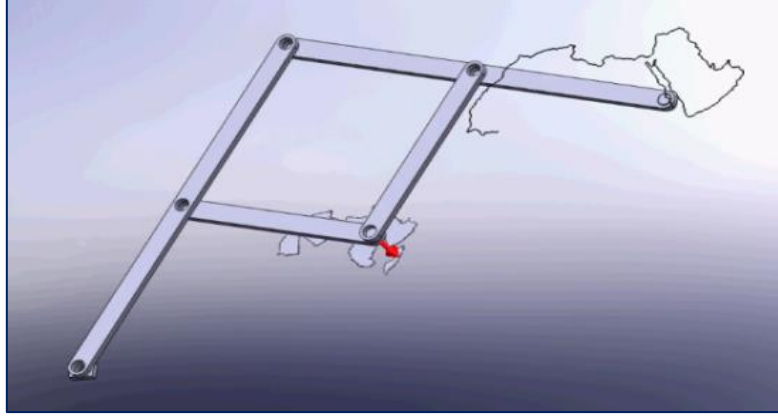
كلية العلوم || جامعة البعث || سوريا

الملخص: تُعدُّ آلة رسم الخرائط المستوية آلة مميزة حيث إنَّها تتميز عن غيرها من الآلات بمهامها الفريدة التي تتمثل بالنسخ والنحت وسك العملة وغيرها وبخواص هندسية منها التحاكي وتتعدى ذلك لتتنجز بعض العمليات الرياضية البسيطة كتحديد نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة عُلم طرفاها، وجمع عددين عقديين، وغيرها، ثمَّ شكلنا آلة رسم خرائطية جديدة تقوم بإنشاء عدة نسخ للشكل المراد نسخه وينسب تكبير مختلفة، ونظراً لأهمية هذه الآلة رغبتنا بإجراء دراسة حركية ودراسة تحريكية لهذه الآلة، وتحديد منطقة عمل هذه الآلة ضمن المستوي وتمييز وضعيتين أساسيتين لهذه الآلة.

الكلمات المفتاحية: آلة رسم الخرائط المستوية- الخواص الهندسية - العمليات الرياضية.

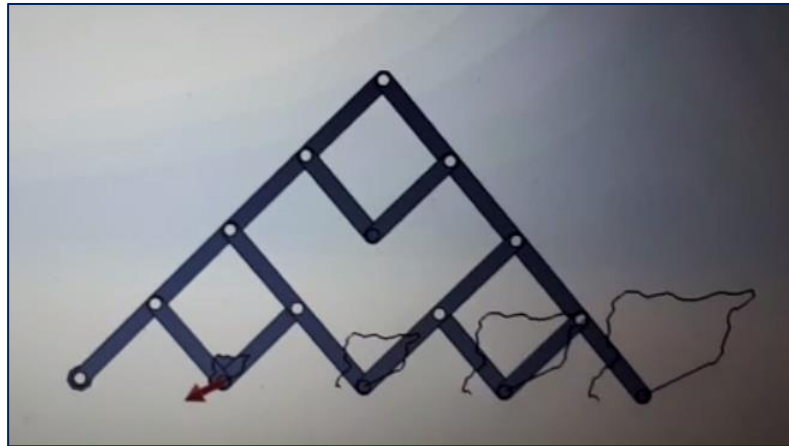
#### مقدمة:

إنَّ آلة رسم الخرائط [1](Pantograph) هي آلة قضبانية بمعنى أنها مجموعة ميكانيكية مترابطة مكونة من قضبان متصلة مع بعضها بمفاصل، ويختلف عمل هذه الآلة باختلاف الشكل الذي تأخذه، فلها عدة أشكال منها ما يكون بسيطاً ومنها ما يكون معقداً، وعند تثبيت أحد الأجزاء نحصل على حركة معينة في الآلة، ومن أهم الأشكال التي تأخذها آلة رسم الخرائط الشكل الذي سميت من أجله والذي يقوم بوظيفة تتبع وشف شكل معين والذي يتميز بوجود مسمار يمر على الشكل المراد نسخه [2]، وقلم مثبت في الطرف الذي يقوم بعملية النسخ كما هو موضح في الشكل (1).



الشكل (1). آلة رسم الخرائط المستوية تقوم بنسخ خريطة الوطن العربي

ويشترط في آلة رسم الخرائط المستوية أن تبقى النقاط الثلاثة (النقطة الثابتة والمسمار (المؤشر) والقلم) على استقامة واحدة على طول الحركة، كما أنّ عمل آلة رسم الخرائط لا يقتصر على نسخ الشكل فقط بل تقوم بنسخه بتكبيره أو بتصغيره أو المحافظة عليه، كما يمكن الحصول على أكثر من نسخة واحدة ولكن بنسب تكبير مختلفة عند تقسيم آلة رسم الخرائط المضاعفة إلى آلتين داخليتين كما هو موضح في الشكل (2).



الشكل (2). آلة رسم الخرائط المستوية تقوم بنسخ ثلاثة نسخ لخريطة سوريا

وكما هو واضح في هذه الحالة يكون لدينا مسمار واحد وثلاثة أقلام تقوم بالنسخ ويبدو جلياً أنّه كلما كان بُعد قلم النسخ عن المسار أكبر كلما كان الشكل المرسوم أكبر، وقد تم تصميم الآلة التي تقوم بنسخ خريطة الوطن العربي الموضحة في الشكل (1)، والآلة التي تقوم برسم ثلاث نسخ لخريطة سوريا الواردة في الشكل (2) باستخدام برنامج solid works.

إنّ مجالات استخدام آلة رسم الخرائط المستوية عديدة فمن الممكن استبدال قلم النسخ بألة حادة تقوم بالنحت وهنا ننتقل من مجال الرسم إلى مجال النحت كما في الشكل (3)، بل تتجاوزه إلى مجال سك العملة ومن الممكن أيضاً ربط آلة رسم الخرائط المستوية في أجزاء معيّنة من الروبوت الآلي المتمفصلة مع بعضها كأن توضع هذه الآلة في مكان قريب من المفاصل ويوضع بدل قلم النسخ إبرة تسمح بتمرير مادة لزجة وهنا يصبح عمل هذه الآلة هو تزويد مفاصل الروبوت الآلي بمادة لزجة لمنع الاحتكاك كما يمكن ربط آلة رسم الخرائط مع آلات أخرى بهدف تسهيل الوظيفة التي تنجزها الآلات الأخرى [3].



الشكل (3). آلة رسم الخرائط تقوم بعملية النحت أو الخرط

#### مشكلة البحث:

- التعريف بالخواص الهندسية التي تتمتع بها آلة رسم الخرائط المستوية.
- إنجاز بعض العمليات الرياضية باستخدام آلة رسم الخرائط المستوية.
- دراسة تحليلية تتضمن إيجاد عدد الوسطاء المستقلة التي تعين موضع آلة رسم الخرائط المستوية.
- تحديد منطقة عمل آلة رسم الخرائط المستوية، وتمييز حالتين أساسيتين لها.
- دراسة تحريكية مقتضبة تلخص بإيجاد المعادلات التفاضلية التي تعين حركة هذه الآلة.

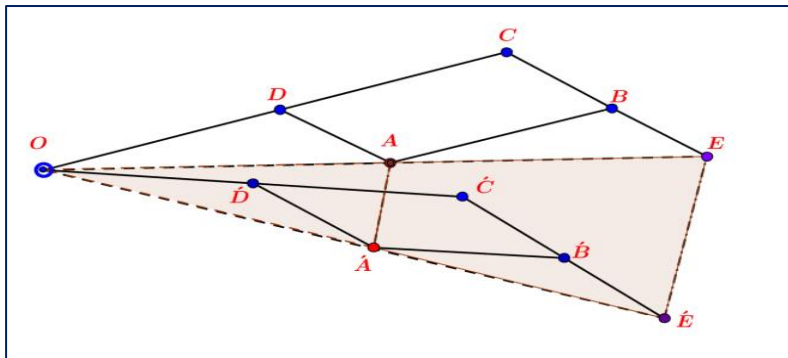
#### مواد البحث وطرائقه:

سنعرض في البداية المبرهنة الآتية:

مبرهنة: لتكن لدينا آلة رسم الخرائط المستوية  $OABCDE$  الموضحة في الشكل (4)، إذا تحركت هذه الآلة فإن جميع نقاطها باستثناء النقطة الثابتة  $O$  تتحرك إلى وضعيات جديدة  $A', B', C', D', E'$  فإذا رسمت النقطة المؤشر  $A$  عند انتقالها إلى النقطة  $A'$  قطعة مستقيمة فإن النقطة  $E$  تنتقل إلى النقطة  $E'$  وترسم قطعة مستقيمة أيضاً ويتحقق أن:

$$1) [EE'] // [AA'] \quad , \quad 2) EE' = \left( \frac{OC}{OD} \right) AA'$$

#### الاثبات:



الشكل (4). آلة رسم الخرائط المستوية أثناء انتقالها بين موضعين

في الشكل (4) لدينا:  $AB = CD$  و  $AD = BC$ ، والنقاط  $O, A, E$  تقع على استقامة واحدة. عندما تتحرك النقطة  $A$  إلى النقطة  $A'$ ، فإنَّ النقطة  $E$  تتحرك إلى النقطة  $E'$  وتكون النقاط  $O, A', E'$  على استقامة واحدة.

المثلث  $ODA$  يشابه المثلث الأصلي  $OCE$  حسب النظرية الأساسية في التشابه، والمثلث  $OD'A'$  يشابه المثلث  $OC'E'$  أيضاً بحسب النظرية الأساسية في التشابه، ومن نسب التشابه نستطيع أن نكتب:

$$\frac{OD'}{OC'} = \frac{OA'}{OE'} = \frac{D'A'}{C'E'} \quad \text{و} \quad \frac{OD}{OC} = \frac{OA}{OE} = \frac{DA}{CE}$$

ولكن

$$\frac{OD}{OC} = \frac{OD'}{OC'} \quad \wedge \quad \frac{OA}{OE} = \frac{OA'}{OE'}$$

وبالتالي فالمثلثين  $OAA'$ ،  $OEE'$  متشابهان، وبالتالي فإنَّ  $EE' // AA'$ ، وكما أنَّ:

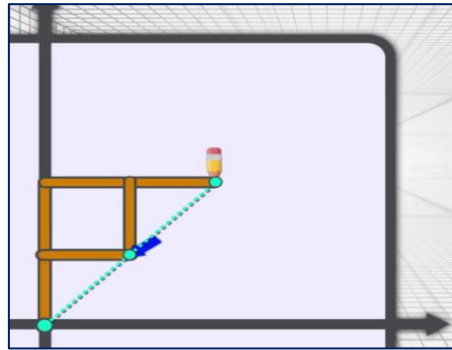
$$\frac{EE'}{AA'} = \frac{OE}{OA} = \frac{OC}{OD} \Rightarrow EE' = \left( \frac{OC}{OD} \right) AA'$$

حيث ندعو المقدار  $\left( \frac{OC}{OD} \right)$  بعامل التكبير.

توظيف آلة رسم الخرائط المستوية في إنجاز بعض العمليات الرياضية

آلة رسم الخرائط المستوية وعلاقتها ببعض العمليات على الأعداد العقدية:

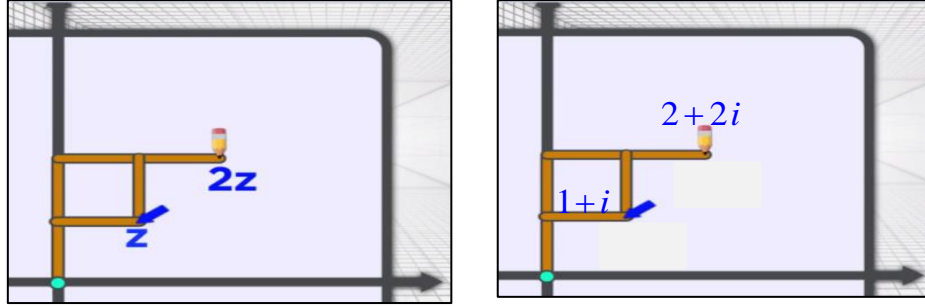
آلة الرسم الخرائطية كما نوهنا سابقاً أنها آلة قضبانية مترابطة مع بعضها بمفاصل بطريقة تعتمد على التوازي، وفيها ثلاث نقاط مميزة هي النقطة الثابتة والمؤشر (السهم) والقلم، ويشترط في هذه النقاط أن تقع دوماً على استقامة واحدة كيفما تحركت هذه الآلة، ويتوضح ذلك في الشكل (5).



الشكل (5). آلة رسم الخرائط المستوية وتوضيح فكرة النقاط التي تقع على استقامة واحدة

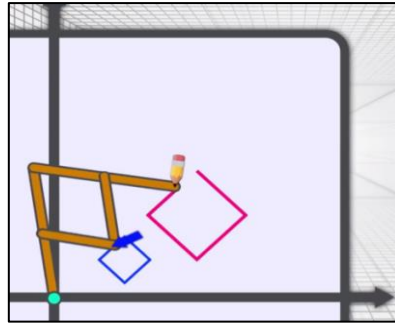
كما تتميز آلة رسم الخرائط بقدرتها على الدوران والانكماش والتوسع، وهذا يُمكنها من القيام بمهام عديدة كنسخ الأشكال بدقة، أو نسخها مكبَّرة أو مصغَّرة، وهذا يرتبط عملياً بمفاهيم موجودة في الهندسة مثل الدوران والتحاكي وغيرها، وبما أنَّ آلة رسم الخرائط فيها مفصل مثبت فإذا أخذنا معلم متجانس  $(O, i, j)$  أي المستوي  $OXY$ ، فمن المعلوم أنَّ كل عدد عقدي  $z = x + iy$ ؛  $x, y \in \mathbb{C}$  يناظر نقطة  $(x, y)$  من المستوي  $OXY$ .

فإذا جعلنا المفصل الثابت من آلة رسم الخرائط في  $O$  عندئذٍ نستطيع إنجاز بعض العمليات البسيطة على الأعداد العقدية كضرب عدد عقدي بعدد حقيقي أو جمع عددين عقديين وغيرها، ولنورد بعض الأمثلة:  
آلة رسم الخرائط التي تمثل الدالة  $f(z) = 2z$ ، وهنا يجب أن نضع المؤشر (السهم) على العدد العقدي  $z$ ، فيشير القلم إلى العدد العقدي  $2z$  كما في الشكل (6).



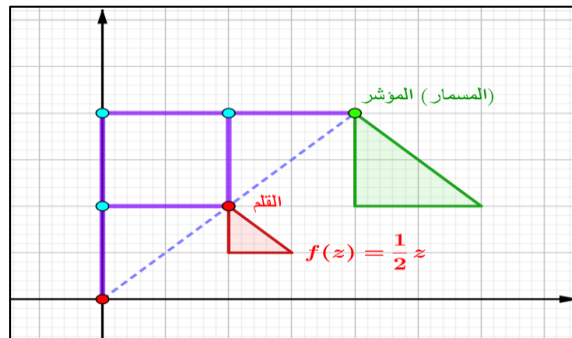
الشكل (6). آلة رسم الخرائط المستوية تمثل الدالة  $f(z) = 2z$

وعندما ترسم شكل معين فإنه ينتج شكل جديد مساحته أربعة أضعاف مساحة الشكل الأصلي وهنا عندما يمر المؤشر على المربع الصغير فإن القلم يرسم المربع الكبير الذي مساحته أربعة أضعاف مساحة المربع الصغير كما هو موضح في الشكل (7).



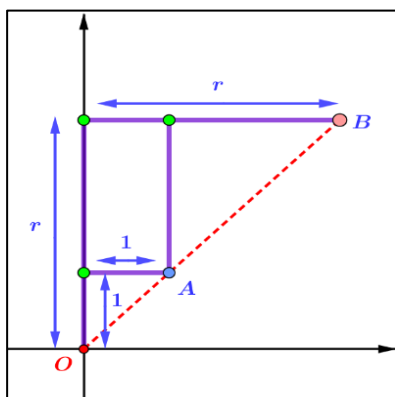
الشكل (7). آلة رسم الخرائط المستوية ترسم شكل مساحته أربعة أضعاف مساحة الشكل الأصلي

في المثال السابق إذا استبدلنا مكان المؤشر والقلم نحصل على الدالة  $f(z) = \frac{1}{2}z$  وهنا ترسم الآلة شكلاً مساحته ربع مساحة الشكل الأصلي، كما في الشكل (8).



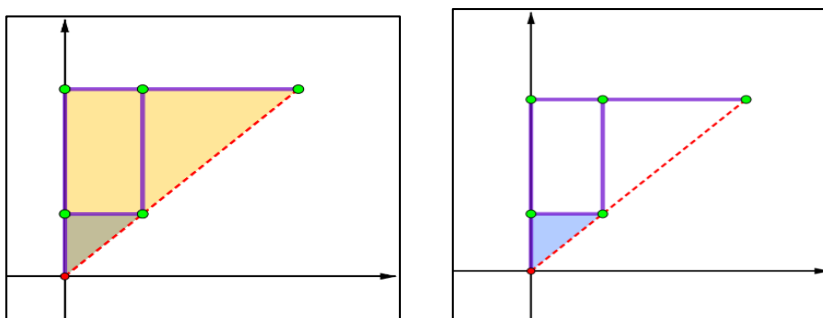
الشكل (8). آلة رسم الخرائط المستوية ترسم شكل مساحته ربع مساحة الشكل الأصلي

بشكل عام تمثل آلة رسم الخرائط المستوية الدالة  $f(z) = rz$  ;  $r > 0$  عندما تأخذ الشكل (9).



الشكل (9). آلة رسم الخرائط المستوية الممثلة للدالة  $f(z) = rz$  ;  $r > 0$ .

وتتميز هذه الآلة بأنّ المثلث الصغير متساوي الساقين طول كل من ضلعيه يساوي الواحد يشابه المثلث الأصلي الكبير متساوي الساقين والذي طول ضلعيه يساوي  $r$  ومساحة المثلث الكبير هي  $r^2$  مضروباً بمساحة المثلث الصغير ولنوضح ذلك بالشكل (10):



الشكل (10). آلة رسم الخرائط المستوية والعلاقة بين المثلثين الصغير والأصلي

آلة رسم الخرائط وعلاقتها بمفهوم التحاكي:

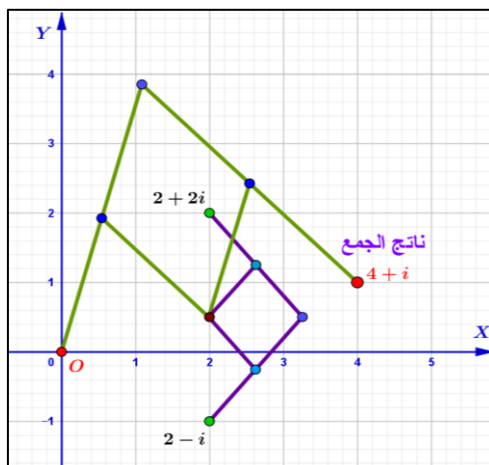
لنذكر بتعريف مفهوم التحاكي أولاً:

لتكن  $O$  نقطة مفترضة من المستوي و  $k$  عدد حقيقي غير معدوم. نسمي تحاكياً  $h$  مركزه  $O$  ونسبته  $k$  التحويل الذي يقرب كل نقطة  $M$  من المستوي بنقطة  $M'$  تحقق  $OM' = k OM$ . ونرمز لهذا التحويل بالرمز  $h_{O,k}$ .

نسمي النقطة  $M'$  صورة النقطة  $M$  وفق التحاكي  $h$ ، ونكتب رمزاً لذلك  $M' = h(M)$ .

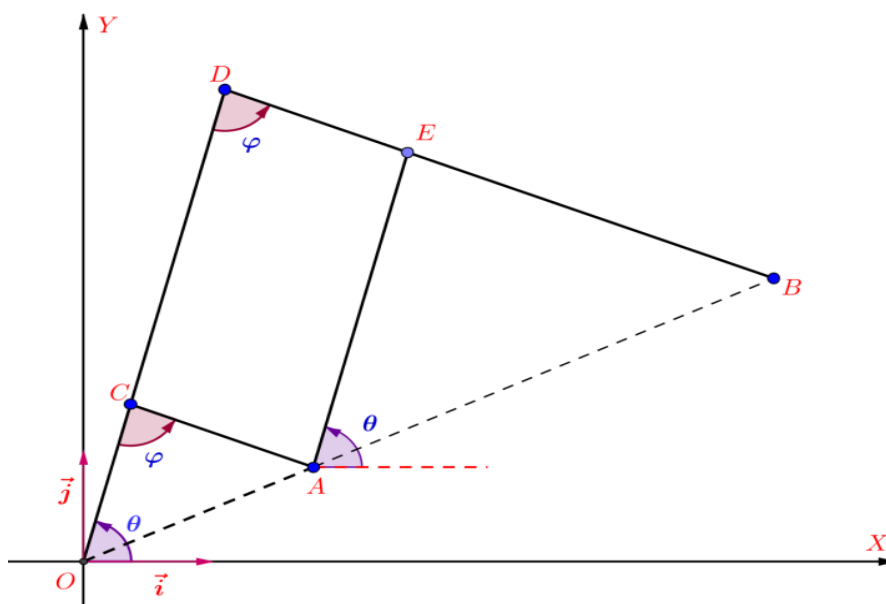
الآن لننأمل آلة رسم الخرائط الموضحة في الشكل (9)، نلاحظ أنّ النقاط  $O, A, B$  تقع دوماً على استقامة واحدة، والجدير بالذكر أنّ النقطتين  $A, B$  متحركتان، وفي كل لحظة تتحقق العلاقة:  $OB = rOA$  ;  $r > 0$  وهذا يعني أنّ النقطة  $B$  هي صورة النقطة  $A$  وفق تحاكي مركزه  $O$  ونسبته  $r > 0$ ، وهذا ما يفسر أنّ المسار الذي ترسمه النقطة  $B$  هو نفس المسار الذي ترسمه  $A$  ولكن محيطة يساوي  $r$  مضروباً بمحيط الشكل الذي ترسمه النقطة  $B$  ومساحته تساوي  $r^2$  مضروباً بمساحة الشكل الذي ترسمه النقطة  $B$ .





الشكل (13). مثال يوضِّح عملية جمع عددين عقديين باستخدام آلة رسم الخرائط المستوية

دراسة حركية لآلة رسم الخرائط المستوية حالة مفصل ثابت في  $O$ ، [54]:  
 لتكن  $OXY$  جملة مقارنة ثابتة قاعدتها  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، تمثل المستوي الشاقولي الذي تتحرك فيه آلة رسم الخرائط الموضَّحة في الشكل (14)، والمؤلفة من أربعة قضبان (مستقيمات) هي  $OD, DB, CA, AE$  ونذكر بأنَّ النقطة  $A$  تمثل المؤشر الذي يمر على المسار المعطى والنقطة  $B$  تمثل القلم الذي يرسم المسار الجديد عندما تمر النقطة  $A$  على المسار المعطى، ويتعين موضع آلة رسم الخرائط المتحركة في المستوي بمعرفة مواضع الأجسام المؤلفة لها، ولندرس حركة هذه الأجسام على التتالي:



الشكل (14). آلة رسم الخرائط المستوية مبيناً عليها الوسطاء المستقلة



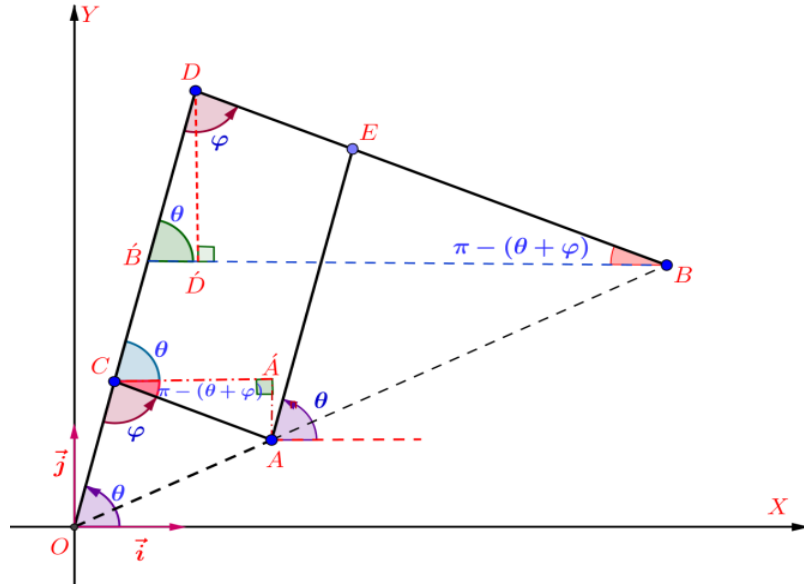
القضيب  $OD$ : إنَّ القضيب  $OD$  يتحرك في المستوي وفيه نقطة ثابتة منه هي  $O$ ، وبالتالي فهو يتحرك حركة دورانية حول المحور المار من النقطة الثابتة  $O$  والعمودي على مستوي الحركة أي حول  $OZ$  وبالتالي يتعين موضعه بمعرفة وسيط واحد هو  $\theta = (OX \curvearrowright OD)$  زاوية الدوران حول محور الدوران.

القضيب  $DB$ : إنَّ القضيب  $DB$  يتحرك حركة عامة في المستوي حيث ينتقل مع النقطة  $D$  ويدور حول المحور الآني المار من  $D$  والعمودي على مستوي الحركة أي  $DZ$ ، وبالتالي يتعين موضعه بمعرفة إحداثيات النقطة  $D$ ، وزاوية الدوران حول المحور الآني  $DZ$ ، ولتكن  $\varphi = (OD \curvearrowright DB)$ ، ولكن بما أنَّ  $D$  نقطة من القضيب  $OD$  بالتالي يتعين موضعها بمعرفة وسيط هو الزاوية  $\theta$ ، وبالتالي نستنتج أنَّ القضيب  $DB$  يتعين موضعه بمعرفة وسيطين هما  $\theta, \varphi$ .

القضيب  $CA$ : إنَّ القضيب  $CA$  يتحرك حركة عامة في المستوي حيث ينتقل مع النقطة  $C$  ويدور حول المحور الآني المار من  $C$  والعمودي على مستوي الحركة أي  $CZ$ ، وبالتالي يتعين موضعه بمعرفة إحداثيات النقطة  $C$ ، وبمعرفة زاوية الدوران حول المحور الآني  $CZ$ ، ونظراً للتوازي بين القضيبين  $CA, DB$ ، وكون  $C, D$  واقعتين دوماً على القضيب  $OD$  فإنَّ  $\varphi = (OD \curvearrowright DB) = (OC \curvearrowright CA)$  ولكن بما أنَّ  $C$  نقطة من القضيب  $OD$  بالتالي يتعين موضعها بمعرفة وسيط هو الزاوية  $\theta$ ، وبالتالي نستنتج أنَّ القضيب  $CA$  يتعين موضعه بمعرفة وسيطين هما  $\theta, \varphi$ .

القضيب  $AE$ : إنَّ القضيب  $AE$  يتحرك حركة عامة في المستوي حيث ينتقل مع النقطة  $A$  ويدور حول المحور الآني المار من  $A$  والعمودي على مستوي الحركة أي  $AZ$ ، وبالتالي يتعين موضعه بمعرفة إحداثيات النقطة  $A$ ، وزاوية الدوران حول المحور الآني  $AZ$ ، ونظراً للتوازي بين القضيبين  $AE, OD$  فإنَّ  $\theta = (OX \curvearrowright OD) = (AX \curvearrowright AE)$ ، وبما أنَّ النقطة  $A$  هي نقطة من القضيب  $EA$ ، ووجدنا أن موضعها يتعين بمعرفة وسيطين هما  $\theta, \varphi$  [6]، فإننا نجد أنَّ موضع القضيب  $AE$  يتعين بمعرفة الوسيطين  $\theta, \varphi$ ، مما سبق

نستنتج أن آلة رسم الخرائط تتعين بمعرفة الوسيطين المستقلين  $\theta, \varphi$ . [7]. لنوجد إحداثيات النقاط الموضحة في الشكل بدلالة الوسيط المستقل. إن القضبان المكونة لآلة رسم الخرائط أطوالها  $OD = DB = l_1, OC = CA = l_2$ . كما أن النقاط  $O, A, B$  تبقى على استقامة واحدة على طول الحركة، كما هو موضح في الشكل (15)، مع الأخذ بعين الاعتبار أن:



الشكل (15). آلة رسم الخرائط المستوية موضحة عليها بعض الإسقاطات

$$OD = DB = l_1, \quad OC = CA = DE = l_2$$

وبالتالي فإن:

$$OC + CD = OD \Rightarrow CD = OD - OC = l_1 - l_2, \quad AE = CD = l_1 - l_2$$

ولنوجد إحداثيات النقاط  $A, B, D, C$  على الترتيب: من الواضح أن:

$$\vec{OC} = OC \cos \theta \vec{i} + OC \sin \theta \vec{j} = l_2 \cos \theta \vec{i} + l_2 \sin \theta \vec{j} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x(C) = l_2 \cos \theta \\ y(C) = l_2 \sin \theta \end{cases} \quad (1)$$

وكما أن:

$$\vec{OD} = OD \cos \theta \vec{i} + OD \sin \theta \vec{j} = l_1 \cos \theta \vec{i} + l_1 \sin \theta \vec{j} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x(D) = l_1 \cos \theta \\ y(D) = l_1 \sin \theta \end{cases} \quad (2)$$

وبأسلوب مشابه نجد أن:

$$\vec{OB} = [l_1 \cos \theta - l_1 \cos(\theta + \varphi)] \vec{i} + [l_1 \sin \theta - l_1 \sin(\theta + \varphi)] \vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(B) = l_1 [\cos \theta - \cos(\theta + \varphi)] \\ y(B) = l_1 [\sin \theta - \sin(\theta + \varphi)] \end{cases} \quad (3)$$

وأيضاً:

$$\begin{aligned} \vec{OA} &= 1_2 [\cos \theta - \cos(\theta + \varphi)] \vec{i} + 1_2 [\sin \theta - \sin(\theta + \varphi)] \vec{j} \\ \Rightarrow \begin{cases} x(A) = 1_2 [\cos \theta - \cos(\theta + \varphi)] \\ y(A) = 1_2 [\sin \theta - \sin(\theta + \varphi)] \end{cases} \quad (4) \end{aligned}$$

من الواضح أن:

$$\begin{aligned} \vec{OB} &= 1_1 \{ [\cos \theta - \cos(\theta + \varphi)] \vec{i} + [\sin \theta - \sin(\theta + \varphi)] \vec{j} \} \\ &= \frac{1_1}{1_2} \{ 1_2 [\cos \theta - \cos(\theta + \varphi)] \vec{i} + 1_2 [\sin \theta - \sin(\theta + \varphi)] \vec{j} \} \\ &= \frac{1_1}{1_2} \vec{OA} = 1 \vec{OA} \quad ; 1 = \frac{1_1}{1_2} \\ \Rightarrow \vec{OB} &= 1 \vec{OA} \quad \& \quad x(B) = 1x(A) \quad , \quad y(B) = 1y(A) \quad (5) \end{aligned}$$

وباشتقاق طرفي العلاقة  $\vec{OB} = 1 \vec{OA}$  بالنسبة للزمن نجد أن:

$$\frac{d\vec{OB}}{dt} = 1 \frac{d\vec{OA}}{dt} \Rightarrow \vec{v}(B) = 1 \vec{v}(A) \quad (6)$$

مما يعني أن سرعة حركة النقطة  $B$  تتناسب طردياً مع سرعة حركة النقطة  $A$  بثابت تناسب هو

$$1 = \frac{1_1}{1_2} = \frac{OD}{OC}$$

$$\frac{d\vec{v}(B)}{dt} = 1 \frac{d\vec{v}(A)}{dt} \Rightarrow \vec{\Gamma}(B) = 1 \vec{\Gamma}(A) \quad (7)$$

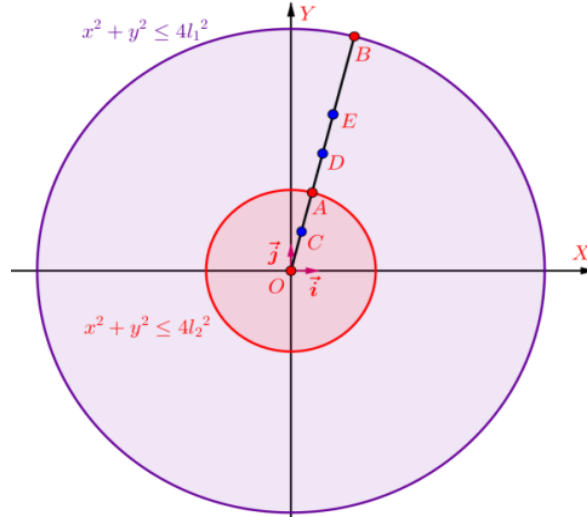
مما يعني أن تسارع حركة النقطة  $B$  يتناسب طردياً مع تسارع حركة النقطة  $A$  بنفس ثابت التناسب 1.

منطقة عمل آلة رسم الخرائط المستوية:

السؤال الذي يتبادر إلى الذهن مباشرة، ترى هل تستطيع آلة رسم الخرائط أن ترسم صورة أي نقطة  $A(x, y)$  من المستوي  $OXY$  وفق تحاكٍ مركزه النقطة الثابتة  $O$  ونسبته  $1 = \frac{OD}{OC}$  أم أن هناك شرطاً ينبغي أن تحققه النقطة  $A$  حتى تتمكن آلة رسم الخرائط من رسم صورة هذه النقطة، وما هي منطقة العمل التي ترسم فيها النقطة  $B$  الصورة المطلوبة لمسار النقطة  $A$  ويمكن أن نعبر عن هذا السؤال رياضياً بالشكل: ماهي نقاط المستوي التي يمكن أن تتحقق فيها العلاقة  $h_{O,1}(A) = B$ ، وعبر عن منطقة عمل النقطة  $A$ ، وعن منطقة عمل النقطة  $B$  بالعلاقات الرياضية المناسبة.

إنَّ أبعد مكان تصل إليه النقطة (المؤشر)  $A(x, y)$  هو الموضع الذي تتحقق فيه العلاقة  $OA = OC + CA = 1_2 + 1_2 = 21_2$ ، أي عندما تكون النقاط  $O, C, A$  على استقامة واحدة، وبما أنَّ النقطة  $O$  ثابتة، والنقطة  $A$  متحركة فإننا نستنتج أنَّ المحل الهندسي للنقطة  $A$  عندما تكون في أبعد مكان لها عن النقطة الثابتة  $O$  هو الدائرة  $(O, 21_2)$ ، وبالتالي فإنَّ منطقة العمل التي من الممكن أن تتحرك فيها النقطة  $A$  هي القرص الدائري الذي معادلته:  $x^2 + y^2 \leq 41_2^2$ ، أما عندما تكون النقطة  $A$  (المؤشر) في أبعد مكان لها عن النقطة الثابتة  $O$ ، تكون النقطة  $B$  (القلم) في أبعد مكان لها عن النقطة  $O$ ، وعندما تتحرك النقطة  $A$  في هذه الحالة لترسم حدود منطقة عملها فإنَّ النقطة  $B$  تتحرك في نفس الوقت لترسم منطقة عملها أيضاً، وعندما تحقق النقطة

العلاقة  $OA = OC + CA = l_2 + l_2 = 2l_2$  فإنَّ النقطة  $B$  تحقق العلاقة  $OB = OD + DB = l_1 + l_1 = 2l_1$  والنقطة  $B$  متحركة فإننا نستنتج أنَّ المحل الهندسي للنقطة  $B$  عندما تكون في أبعد مكان لها عن النقطة الثابتة  $O$  هو الدائرة  $(O, 2l_1)$  وبالتالي فإنَّ منطقة العمل التي من الممكن أن تتحرك فيها النقطة  $B$  هي القرص الدائري الذي معادلته:  $x^2 + y^2 \leq 4l_1^2$  ونوضِّح منطقة عمل آلة رسم الخرائط المستوية بالشكل (16).



الشكل (16). منطقة عمل آلة رسم الخرائط المستوية وتوضيح حالة الاتساع الأعظمي

حالة الاتساع الأعظمي لآلة رسم الخرائط لمستوية :

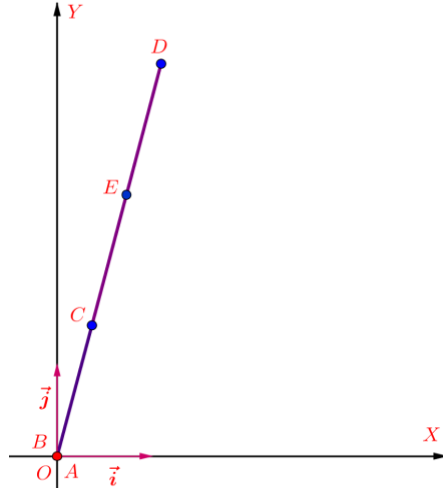
عندما تكون النقطة  $A$  في أبعد مكان لها عن النقطة الثابتة  $O$ ، تكون جميع النقاط  $O, A, C, D, E, B$  على استقامة واحدة، ونصطلح أن نسي هذه الحالة بحالة الاتساع الأعظمي لآلة رسم الخرائط المستوية كما في الشكل (16).

حالة الانكماش الأعظمي لآلة رسم الخرائط المستوية :

عندما تكون النقطة  $A$  منطبقة على النقطة الثابتة  $O$ ، فإنَّ النقطة  $B$  تكون منطبقة على النقطة الثابتة

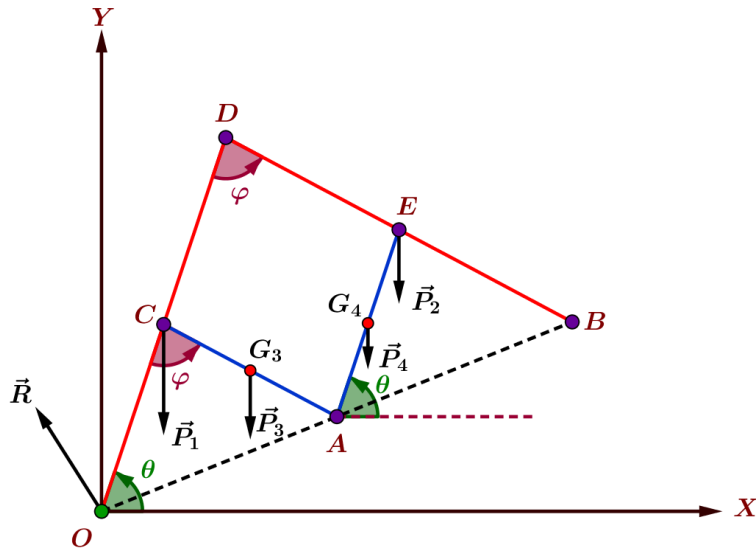
$O$

وذلك لأنَّ  $\vec{OB} = 1 \vec{OA} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، كما تكون النقاط  $O, C, D, E$  على استقامة ونصطلح أن نسي هذه الحالة بحالة الانكماش الأعظمي لآلة رسم الخرائط كما في الشكل (17).



الشكل (17). آلة رسم الخرائط المستوية وتوضيح حالة الانكماش الأعظمي

دراسة تحريكية لآلة رسم الخرائط المستوية حالة مفصل ثابت في  $O$  [8، 9]:  
 لتكن  $OXY$  جملة مقارنة ثابتة قاعدتها  $(O, \hat{i}, \hat{j})$ ، تمثل المستوي الشاقولي الذي تتحرك فيه آلة رسم الخرائط الموضحة في الشكل المجاور، والمؤلفة من أربعة قضبان (مستقيمات) هي  $OD, DB, CA, AE$  وبفرض أنّ كتلة وطول كل من القضيبين  $OD, DB$  يساوي ضعفي كتلة وطول كل من القضيبين  $CA, AE$ ، ولنوجد المعادلات التفاضلية التي تعين حركة آلة رسم الخرائط المستوية الموضحة في الشكل (18).



الشكل (18). آلة رسم الخرائط المستوية موضحة عليها القوى الخارجية المؤثرة

بفرض أنّ كتلة القضيبين  $CA, AE$  هي  $m$  وطول كل منهما 1 عندئذ تكون كتلة كل من القضيبين  $OD, DB$  هي  $2m$  وطول كل منهما 2.  
 لقد وجدنا أنّ آلة رسم الخرائط المستوية يتعين موضعها بمعرفة الوسيطين  $\theta, \varphi$ ، وبالتالي فإن عدد المعادلات التفاضلية الكافية لوصف حركة الآلة هو معادلتان تفاضليتان، ولإيجادهما نطبق نظرية الطاقة الحركية ونظرية العزم الحركي بالنسبة لـ  $O$  على الترتيب، وذلك بالشكل [10]:

$$T_o(S) = T_o(OD) + T_o(DB) + T_o(CA) + T_o(AE) \quad (8)$$

إنَّ القضيب  $OD$  يتحرك حركة دورانية حول المحور الأفقي  $OZ$  والعمودي على مستوى الحركة وبالتالي

فإنَّ:

$$T_o(OD) = \frac{1}{2} I_{oz} \theta^{\cdot 2} = \frac{1}{2} \left( \frac{(2m)(2l)^2}{3} \right) \theta^{\cdot 2} = \frac{4}{3} m l^2 \theta^{\cdot 2} \quad (9)$$

أما القضيب  $DB$  يتحرك حركة عامة في المستوي  $OXY$ ، ولإيجاد الطاقة الحركية له نطبق نظرية كونينغ الثانية [11]، وبالتالي فإنَّ:

$$T_o(DB) = T_o(G_{DB}) + T_{G_{DB}}(DB) \quad (10)$$

إنَّ القضيب  $DB$  يتحرك حركة دورانية آنية حول المحور المار من مركز كتله  $G_{DB}$  والعمودي على مستوى الحركة أي حول  $G_{DB}Z$ ، ومنه فإنَّ:

$$T_{G_{DB}}(DB) = \frac{1}{2} I_{G_{DB}Z} \varphi^{\text{g}2} = \frac{1}{2} \left( \frac{(2m)(2l)^2}{12} \right) \varphi^{\text{g}2} = \frac{1}{3} m l^2 \varphi^{\text{g}2} \quad (11)$$

أما الطاقة الحركية لمركز الكتل فهي:

$$T_o(G_{DB}) = \frac{1}{2} (2m) v^2(G_{DB}) = m v^2(G_{DB}) \quad (12)$$

وبما أنَّ:

$$\begin{aligned} \overline{OG_{DB}} &= l [2 \cos \theta - \cos(\theta + \varphi)] \overline{i} + l [2 \sin \theta - \sin(\theta + \varphi)] \overline{j} \\ \overline{v}(G_{DB}) &= l [-2\dot{\theta} \sin \theta + (\dot{\theta} + \dot{\varphi}^{\text{g}}) \sin(\theta + \varphi)] \overline{i} + l [2\dot{\theta} \cos \theta - (\dot{\theta} + \dot{\varphi}^{\text{g}}) \cos(\theta + \varphi)] \overline{j} \\ v^2(G_{DB}) &= l^2 [-2\dot{\theta} \sin \theta + (\dot{\theta} + \dot{\varphi}^{\text{g}}) \sin(\theta + \varphi)]^2 + l^2 [2\dot{\theta} \cos \theta - (\dot{\theta} + \dot{\varphi}^{\text{g}}) \cos(\theta + \varphi)]^2 \\ &= l^2 [4\dot{\theta}^2 + (\dot{\theta} + \dot{\varphi}^{\text{g}})^2 - 4\dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\varphi}^{\text{g}}) \cos \varphi] \end{aligned}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في العلاقة (12) نجد أنَّ:

$$T_o(G_{DB}) = m l^2 [4\dot{\theta}^2 + (\dot{\theta} + \dot{\varphi}^{\text{g}})^2 - 4\dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\varphi}^{\text{g}}) \cos \varphi] \quad (13)$$

وبالاستفادة من العلاقة (11) و (13)، والتعويض في العلاقة (10) نجد أنَّ:

$$T_o(DB) = m l^2 \left[ 4\dot{\theta}^2 + \frac{1}{3} \varphi^{\text{g}2} + (\dot{\theta} + \dot{\varphi}^{\text{g}})^2 - 4\dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\varphi}^{\text{g}}) \cos \varphi \right] \quad (14)$$

وبالمثل نجد أنَّ:

$$T_o(CA) = \frac{m l^2}{24} [12\dot{\theta}^2 + \varphi^{\text{g}2} + 3(\dot{\theta} + \dot{\varphi}^{\text{g}})^2 - 12\dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\varphi}^{\text{g}}) \cos \varphi] \quad (15)$$

$$T_o(AE) = \frac{1}{24} m l^2 [28\dot{\theta}^2 + 12(\dot{\theta} + \dot{\varphi}^{\text{g}})^2 - 36\dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\varphi}^{\text{g}}) \cos \varphi] \quad (16)$$

وبالاستفادة من العلاقات (9)، (14)، (15)، (16)، والتعويض في العلاقة (8) نجد أنَّ:

$$T_o(S) = \frac{1}{24} m l^2 [168\dot{\theta}^2 + 9\varphi^{\text{g}2} + 39(\dot{\theta} + \dot{\varphi}^{\text{g}})^2 - 144\dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\varphi}^{\text{g}}) \cos \varphi] \quad (17)$$

وباعتبار المفاصل ملساء فإنَّ القوى الخارجية المؤثرة على المجموعة المادية (آلة رسم الخرائط المستوية) هي قوى الثقل بالإضافة إلى قوة رد الفعل في المفصل  $O$ ، كما هو موضَّح في الشكل (18)، وهي:

$$P_1 = m_1 g = 2m g, P_2 = m_2 g = 2m g, P_3 = m_3 g = m g, P_4 = m_4 g = m g$$

والمفصل  $O$  والتي نرمز لها بـ  $R$ ، ونقطة تأثيرها هي  $O$ . ولنوجد أعمال هذه القوى الخارجية تمهيداً لتطبيق نظرية الطاقة الحركية من أجل إيجاد المعادلات التفاضلية للحركة.

$$U(P_1) = \int P_1 \cdot dOG_{OD} = \int (-2mg \mathbf{j}) \cdot (dx (G_{OD}) \mathbf{i} + dy (G_{OD}) \mathbf{j}) = \int -2mg dy (G_{OD})$$

$$= -2mg y (G_{OD}) = -mgl \sin \theta \Rightarrow \boxed{U(P_1) = -2mgl \sin \theta} \quad (18)$$

وبالمثل نجد أن:

$$\left. \begin{aligned} U(P_2) &= -2mgl [2 \sin \theta - \sin(\theta + \varphi)] , \quad U(P_3) = -\frac{1}{2} mgl [2 \sin \theta - \sin(\theta + \varphi)] \\ U(P_4) &= -\frac{1}{2} mgl [3 \sin \theta - 2 \sin(\theta + \varphi)] \end{aligned} \right\} (19)$$

كما أنَّ  $U(R) = 0$ ، وذلك لأنَّ نقطة تأثير هذه القوة ساكنة. وبالتالي فالانتقال الذي تسببه هذه القوة معدوم الأمر الذي يجعل عملها معدوماً أيضاً، ولدينا من نظرية الطاقة الحركية أن:

$$T_o(S) = U(P_1) + U(P_2) + U(P_3) + U(P_4) + U(R) + h \quad (20)$$

وبالاستفادة من العلاقات (17)، (18)، (19) وكون  $U(R) = 0$ ، والتعويض في العلاقة (20) نجد أن:

$$\boxed{168\dot{\theta}^2 + 9\varphi^2 + 39(\dot{\theta} + \varphi^g)^2 - 144\dot{\theta}(\dot{\theta} + \varphi^g)\cos\varphi = -12\frac{g}{l}[17\sin\theta - 7\sin(\theta + \varphi)] + \frac{24h}{m l^2}} \quad (21)$$

وهي المعادلة التفاضلية الأولى، ولإيجاد المعادلة التفاضلية الثانية نطبِّق نظرية العزم الحركي بالنسبة لـ  $O$ ، وذلك بالشكل:

$$\frac{d}{dt} \sigma_o(S) = Mom_o(P_1) + Mom_o(P_2) + Mom_o(P_3) + Mom_o(P_4) + Mom_o(R) \quad (22)$$

ولنبدأ أولاً بإيجاد العزم الحركي للمجموعة المادية:

$$\sigma_o(S) = \sigma_o(OD) + \sigma_o(DB) + \sigma_o(CA) + \sigma_o(AE) \quad (23)$$

إنَّ القضيب  $OD$  يتحرك حركة دورانية حول المحور المار من  $O$  والعمود على مستوي الحركة أي حول  $OZ$ ، وبالتالي فإنَّ:

$$\sigma_o(OD) = I_{OZ} \dot{\theta} k = \frac{(2m)(2l)^2}{3} \dot{\theta} k = \frac{8}{3} m l^2 \dot{\theta} k \Rightarrow \sigma_o(OD) = \frac{8}{3} m l^2 \dot{\theta} k \quad (24)$$

أما القضيب  $DB$  فيتحرك حركة عامة في المستوي  $OXY$ ، ولإيجاد العزم الحركي له نطبِّق نظرية كونينغ الأولى [12]، وبالتالي فإنَّ:

$$\sigma_o(DB) = \sigma_o(G_{DB}) + \sigma_{G_{DB}}(DB) \quad (25)$$

حيث أن:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_O(G_{DB}) &= OG_{DB} \wedge (2m)^v(G_{DB}) = \\ &= 2m l^2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 \cos \theta - \cos(\theta + \varphi) & 2 \sin \theta - \sin(\theta + \varphi) & 0 \\ -2\theta' \sin \theta + (\theta' + \varphi^s) \sin(\theta + \varphi) & 2\theta' \cos \theta - (\theta' + \varphi^s) \cos(\theta + \varphi) & 0 \end{vmatrix} \\ \vec{\sigma}_O(G_{DB}) &= 2m l^2 \left[ 4\theta' - 2(2\theta' + \varphi^s) \cos \varphi + (\theta' + \varphi^s) \right] \vec{k} \quad (26) \end{aligned}$$

والقضيب  $DB$  يتحرك حركة دورانية آنية حول المحور المار بمركز كتله  $G_{DB}$  والعمود على مستوي الحركة، وبالتالي فإن:

$$\vec{\sigma}_{G_{DB}}(DB) = I_{G_{DB}} \varphi^s \vec{k} = \frac{(2m)(2l)^2}{12} \varphi^s \vec{k} = \frac{2}{3} m l^2 \varphi^s \vec{k} \Rightarrow \vec{\sigma}_{G_{DB}}(DB) = \frac{2}{3} m l^2 \varphi^s \vec{k} \quad (27)$$

وبالاستفادة من العلاقتين (26)، (27) والتعويض في العلاقة (25) نجد أن:

$$\vec{\sigma}_O(DB) = 2m l^2 \left[ 4\theta' + \frac{1}{3} \varphi^s - 2(2\theta' + \varphi^s) \cos \varphi + (\theta' + \varphi^s) \right] \vec{k} \quad (28)$$

وبالمثل نجد أن:

$$\vec{\sigma}_O(CA) = \frac{1}{4} m l^2 \left[ 4\theta' + \frac{1}{3} \varphi^s - 2(2\theta' + \varphi^s) \cos \varphi + (\theta' + \varphi^s) \right] \vec{k} \quad (29)$$

$$\vec{\sigma}_O(AE) = \frac{1}{4} m l^2 \left[ \frac{28}{3} \theta' - 6(2\theta' + \varphi^s) \cos \varphi + 4(\theta' + \varphi^s) \right] \quad (30)$$

وبالاستفادة من العلاقات (24)، (27)، (28)، (29) والتعويض في العلاقة (23) نجد أن:

$$\vec{\sigma}_O(S) = \frac{1}{4} m l^2 \left[ \frac{168}{3} \theta' + 3\varphi^s - 24(2\theta' + \varphi^s) \cos \varphi + 13(\theta' + \varphi^s) \right] \vec{k} \quad (31)$$

وباشتقاق طرفي العلاقة (31) بالنسبة للزمن نجد أن:

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_O(S) = \frac{1}{4} m l^2 \left[ \frac{168}{3} \theta'' + 3\varphi^{s'} - 24(2\theta'' + \varphi^{s'}) \cos \varphi + 24(2\theta' + \varphi^s) \varphi^s \sin \varphi + 13(\theta'' + \varphi^{s'}) \right] \vec{k} \quad (32)$$

ولنوجد الآن عزوم القوى الخارجية المؤثرة:

$$\vec{Mom}_O(P_1) = OG_{OD} \wedge 2m \vec{g} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 \cos \theta & 1 \sin \theta & 0 \\ 0 & -2m g & 0 \end{vmatrix} = -2m g l \cos \theta \vec{k} \quad (33)$$

وبالمثل نجد أن:

$$\left. \begin{aligned} \vec{Mom}_O(P_2) &= -2m g l [2 \cos \theta - \cos(\theta + \varphi)] \vec{k} \\ \vec{Mom}_O(P_3) &= -\frac{1}{2} m g l [2 \cos \theta - \cos(\theta + \varphi)] \vec{k} \\ \vec{Mom}_O(P_4) &= -\frac{1}{2} m g l [3 \cos \theta - 2 \cos(\theta + \varphi)] \vec{k} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$



وكما أنَّ  $Mom_o(\vec{R}) = 0$ ، وذلك لانطباق نقطة تأثير القوة  $\vec{R}$  والتي هي  $O$  على مركز العزم  $O$ . وبالاستفادة من العلاقات (32)، (33)، (34) والتعويض في العلاقة (22) ثم إسقاط طرفي العلاقة الناتجة على المحور  $OZ$ ، والاختصار نجد أنَّ:

$$\left[ \frac{168}{3} \theta'' + 3 \varphi'' - 24(2\theta'' + \varphi'') \cos \varphi + 24(2\theta' + \varphi') \varphi'' \sin \varphi + 13(\theta'' + \varphi'') \right] \\ = -2 \frac{g}{l} [17 \cos \theta - 7 \cos(\theta + \varphi)] \quad (35)$$

وهي المعادلة التفاضلية الثانية للحركة.

مما سبق نجد أنَّ المعادلات التفاضلية التي تعين حركة آلة رسم الخرائط تتمثل بالعلاقين (21)، (35) ويحل جملة هاتين المعادلتين التفاضليتين نحصل على القانونين الزمنيين للحركة من الشكل  $\theta = \theta(t)$ ،  $\varphi = \varphi(t)$ ، إلا أنَّ حل جملة هاتين المعادلتين التفاضليتين ليس سهلاً ولكن قد يمكن باستخدام البرامج الرياضية الحديثة إيجاد هذا الحل.

### الخلاصة:

في هذا البحث قمنا بتوضيح الخواص الهندسية التي تتمتع بها آلة رسم الخرائط المستوية وبعض العمليات الرياضية التي تستطيع حسابها، وأجرينا دراسة حركية لهذه الآلة وبيننا أنَّ موضع أي نقطة من نقاط هذه الآلة يتعين بمعرفة وسطين مستقلين، وقمنا بتحديد ورسم الحيز الهندسي من المستوي الذي من الممكن أن تتحرك فيه النقطتان الأساسيتان في هذه الآلة (المؤشر وقلم النسخ)، وميزنا وضعيتين أساسيتين لهذه الآلة دعوناها بحالتي الانكماش الأعظمي والانتساع الأعظمي لهذه الآلة، وفي النهاية طبقنا نظريتي الطاقة الحركية والعزم الحركي وأوجدنا معادلتين تفاضليتين تعينان حركة هذه الآلة.

### التوصيات:

نقترح التفكير في طريقة تنقل آلة رسم الخرائط من العمل في مستوي إلى العمل في الفراغ، وتسمية الآلة الناتجة بآلة رسم الخرائط الفراغية، وإجراء دراسة حركية وتحريكية للآلة الفراغية، وتحديد الحيز الهندسي من الفراغ الذي من الممكن أن تتحرك فيه النقطتان الأساسيتان أي تحديد منطقة عمل آلة رسم الخرائط الفراغية.

### المراجع العلمية:

- [1] Hassan, M. , Dissertation (Accuracy of planar system with supper elastic hinges), University of Sofia, Sofia 2006.
- [2] Uicker , J. , Pennock , G. , and Shigley , J. , Theory of Machines and Mechanisms , 4th ed., Oxford University Press , New York 2010.
- [3] Norton , R. , Design of Machinery ,4th ed. , McGraw-Hill Book Company , New York , 2008.
- [4] Mallik , A. K. , Ghosh , A. and Dittrich , G. , Kinematic Analysis and Synthesis of Mechanisms, CRC Press , Inc. , Boca Raton , Florida , 1994.

- [5] Abrar , A. , Haque , N. , Mallick , S. , Mehta , I. and Tyagi , R. K., The Mechanism and Kinematics of a Pantograph Milling Machine, European Journal of Applied Engineering and Scientific Research , Amity School of Engineering & Technology, Amity University, Noida, India , 2 (3):1-5, 2013.
- [6] Gogu , G. , Mobility of Mechanisms: A Critical Review , Mechanism and Machine Theory , 2005.
- [7] Louis N. and Janet , D. , Analytical Mechanics , Cambridge University Press , 1998.
- [8] Martin , G. , Kinematics and Dynamics of Machines , 2nd ed. , Waveland Press Inc. , Long Groove , IL , 2002.
- [9] Wilson, C. and Sadler , P. , Kinematics and Dynamics of Machinery , 3rd ed., Pearson Education , Upper Saddle River , NJ, 2003.
- [10] Arnold , V. I. , Mathematical Methods of Classical Mechanics , 2nd ed., Steklov Mathematical Institute , Moscow , 1988.
- [11] Cohen, M. , Classical Mechanics : a Critical Introduction , University of Pennsylvania , Philadelphia , 2012.
- [12] Waldron , K. and Kinzel , G. , Kinematics , Dynamics and Design of Machinery , 2nd ed., John Wiley and Sons Inc., Hoboken , NJ , 2004.