مجلة العلوم الطبيعية والحياتية والتطبيقية
العدد الثاني – المجلد الثالث
يونيو 2019 م
ISSN: 2522-3356

المجلة العربية للعلوم و نشر الأبحاث
Arab Journal of Sciences & Research Publishing
AJSRP

# Approximation of Function Belonging To Generalized Lipschitz Class Using Euler Submethod $(E, p, q)_\lambda$

**AbdulHadi Mohammed Karzoun** **Omar Mahmoud Netov** **Mohammed Mahmoud Amer**

Faculty of Science || Baath University || Syria

**Abstract:** The main aim of this research is to approximate of functions belonging to generalized Lipschitz $Lip\ (\xi(t), p)$, and associated functions, by Euler Submethod $(\mathrm{E}, \mathrm{p}, \mathrm{q})_\lambda$, where we assume that function $f$ be a $2\pi$ periodic function of Xand and integrable over $[-\pi, \pi]$, in the sense of Lebesgue.

In this research there will be given sufficient conditions to be the Fourier series and its conjugate series summable using means method $(E, p, q)_\lambda$.

Thus, we investigate trigonometric polynomials associated with $f \in Lip\ (\xi(t), p); p > 1$ to approximate $f$ and $\bar{f}$ in $L^p$ norm to the degree of $O\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}\right)(\lambda(n))^{\frac{1}{2p}}\right)$.

By proving two theorems, we use the first Fourier series theorem and compare it to the second sequential theorem conjugate the Fourier series. In both theorems (1) and (2), we rely on the many trigonometric limits resulting Using Euler Submethod $(\mathrm{E}, \mathrm{p}, \mathrm{q})_\lambda$ to the sum of the sum of partial sums of Fourier series $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$ and its conjugats $-\sum_{n=1}^{\infty} B_n(x)$.

Neither of the two methods can assign an approximate sum. In order to reach our desired goal, the analytical and synthetic method was adopted. We defined Euler Submethod $(E, p, q)_\lambda$ and then applied to series with important applications especially in the approximation theory we can get many results, the most important of which is than the Submethod lead to the normal (classical) methods, In conclusion, we can say that our study generalizes all previously known results of this line of work.

**Keywords:** Generalized Lipschitz Class $Lip\ (\xi(t), p)$, Generalized Euler Method $(E, p, q)$, Generalized Euler Submethod $(E, p, q)_\lambda$, The Degree of Approximation.

# تقريب دوال صف ليبشتز المعمم باستخدام طريقة أولر الجزئية المعممة $(E, p, q)_\lambda$

**عبد الهادي محمد كرزون** **عمر محمود نتّوف** **محمد محمود عامر**

كلية العلوم || جامعة البعث || سوريا

**الملخص:** إن الهدف الرئيس من هذا البحث هو تقريب دوال صف ليبشتز المعمم $Lip\ (\xi(t), p)$، والدوال المرافقة لها، بطريقة أولر الجزئية المعممة $(E, p, q)_\lambda$، حيث سنفرض أن الدالة $f$ دورية دورها $2\pi$ وكمولة لوبيغياً على الفترة $[-\pi, \pi]$.

وفي هذا البحث سيتم إعطاء شروط كافية لكي تكون متسلسلة فوريه ومرافقتها قابلتين للجمع (جموعيتين) وفق الطريقة $(E, p, q)_\lambda$.

وبالتالي نستطيع أن نتعرف على كثيرات الحدود المثلثية المرتبطة بالدالة: $f \in Lip\ (\xi(t),p); p > 1$ ، وذلك بغية تقريب هذه الدالة ومرافقتها بالنظيم في الفضاء $L^P$، إلى الدرجة: $O\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}\right)(\lambda(n))^{\frac{1}{2p}}\right)$، من خلال إثبات مبرهنتين نستخدم في الأولى متسلسلة فوريبه $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$، ونستخدم في الثانية المتسلسلة المرافقة لمتسلسلة فوريبه $-\sum_{n=1}^{\infty} B_n(x)$، حيث نعتمد في كلا المبرهنتين (1) و(2) على كثيرة الحدود المثلثية الناتجة عن تطبيق طريقة أولر الجزئية المعممة $(E,p,q)_\lambda$ على متتالية المجاميع الجزئية لكل من متسلسلة فوريبه ومرافقتها.

وللوصول إلى هدفنا المنشود تم اعتماد المنهج التحليلي والتركيبي فقد قمنا بتعريف طريقة أولر الجزئية المعممة ومن ثم تطبيقها على متسلسلات ذات تطبيقات هامة في مجال نظرية التقريب، ويمكننا الحصول على العديد من النتائج أهمها هو أن الطرائق الجزئية تؤدي إلى الطرائق الكلاسيكية (العادية)، ونخلص إلى القول بأن دراستنا تعمم جميع النتائج المعروفة سابقاً في هذا المجال.

**الكلمات المفتاحية:** صف ليبشتز المعمم $Lip\ (\xi(t),p)$ ، طريقة أولر المعممة $(E,p,q)$، طريقة أولر الجزئية المعممة $(E,p,q)_\lambda$، درجة التقريب.

## المقدمة:

إن تقريب دوال صفوف ليبشتز باستخدام متسلسلات فوريبه ومرافقاتها، يتم عن طريق بعض التحويلات المنقطعة المتعلقة بهذه المتسلسلات، وهي عبارة عن مؤثرات خطية، تؤثر على متتاليات المجاميع الجزئية لتلك المتسلسلات فتنقلها لمتتاليات أخرى؛ وهذه الأخيرة تُقرّب باستخدام النظائم المُعرّفة في صفوف ليبشتز المختلفة إلى الدوال نفسها، وذلك بدرجات تقريب متفاوتة.

### مشكلة البحث:

إيجاد درجة تقريب دوال صف ليبشتز المعمم $Lip\ (\xi(t),p)$، والدوال المرافقة لها، من خلال تطبيق وسائط طريقة أولر الجزئية المعممة على كل من متسلسلة فوريبه لتلك الدوال، والمتسلسلة المرافقة لها، علماً أن متسلسلة فوريبه للدالة $f$، والمتسلسلة المرافقة لها، غير متقاربتين في الحالة العامة.

حيث اقتصرت الدراسات السابقة في هذا المجال على الطرائق العادية، وتطبيقها في تقريب دوال بعض صفوف ليبشتز دون غيرها.

## مواد البحث وطرائقه:

اعتمدت الدراسة على منهج التفكير الاستقرائي، والمراد من هذا البحث تعميم النتائج التي تم الحصول عليها في حالة طريقة أولر العادية $(E,q)$، إلى حالة طريقة أولر الجزئية المعممة $(E,p,q)_\lambda$، من خلال إثبات مبرهنتين حول تقريب دوال الصف $Lip\ (\xi(t),p)$ باستخدام الطريقة $(E,p,q)_\lambda$، ومن أهم أدوات هذا البحث التعميم سواء بالنسبة للطريقة المدروسة، أو للصف المدروس، إضافة إلى المصادر والوثائق المختلفة.

**تعريف (1) طريقة أولر $(E,1)$** [5]: لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متسلسلة لانهائية، عندئذ يعطى تحويل طريقة أولر $(E,1)$ (مؤثر أولر $(E,1)$) بالشكل المصفوفي الآتي:

$$t_n^{(E,1)} = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_k$$

حيث إن:

$$a_{n,k} = \begin{cases} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} & ;\ 0 \le k \le n \\ 0 & ; k > n \end{cases}$$

حيث $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$، ونقول إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ قابلة للجمع بطريقة أولر $(E,1)$ إلى المجموع s إذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} t_n^{(E,1)}=s$$

**تعريف (2) طريقة أولر الجزئية $(E,1)_\lambda$:** لتكن $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ متسلسلة لانهائية عندئذ يعطى تحويل طريقة أولر الجزئية $(E,1)_\lambda$ (مؤثر أولر الجزئي $(E,1)_\lambda$) بالشكل المصفوفي الآتي:

$$t_n^{(E,1)_\lambda}=\sum_{k=0}^{\lambda(n)}a_{\lambda(n),k}S_k$$

$$a_{\lambda(n),k}=\begin{cases}\dfrac{\binom{\lambda(n)}{k}}{2^{\lambda(n)}} & ;\ 0\le k\le\lambda(n)\\ 0 & ;k>\lambda(n)\end{cases}$$

حيث إن $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$، $\{\lambda(n)\}_{n=0}^{\infty}$ متتالية متزايدة تماماً من الأعداد الصحيحة الموجبة، ونقول إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ قابلة للجمع بطريقة أولر الجزئية $(E,1)_\lambda$ إلى المجموع $s$ إذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} t_n^{(E,1)_\lambda}=s$$

كما ويمكننا تعريف طريقة أولر الجزئية $(E,q)_\lambda$ حيث $q\ge 1$، بالشكل المصفوفي:

$$t_n^{(E,q)_\lambda}=\sum_{k=0}^{\lambda(n)}a_{\lambda(n),k}S_k$$

حيث إن:

$$a_{\lambda(n),k}=\begin{cases}\dfrac{\binom{\lambda(n)}{k}q^{\lambda(n)-k}}{(1+q)^{\lambda(n)}} & ;\ 0\le k\le\lambda(n)\\ 0 & ;k>\lambda(n)\end{cases}$$

أما طريقة أولر الجزئية المعممة $(E,p,q)_\lambda$ حيث $p,q\ge 1$، فتعطى بالشكل المصفوفي:

$$t_n^{(E,p,q)_\lambda}=\sum_{k=0}^{\lambda(n)}a_{\lambda(n),k}S_k$$

$$a_{\lambda(n),k}=\begin{cases}\dfrac{\binom{\lambda(n)}{k}p^kq^{\lambda(n)-k}}{(p+q)^{\lambda(n)}} & ;\ 0\le k\le\lambda(n)\\ 0 & ;k>\lambda(n)\end{cases}$$

**تعريف (3) الصف $Lip\ (\xi(t),p)$ [2,3,4,10]:**

لتكن لدينا الدالة : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث إن $f\in L^p$ عندئذٍ:

إذا كان $\left(\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}=O(\xi(t))$ فإن:

$f\in Lip\ (\xi(t),p)$.

حيث إن $\xi(t)$ دالة موجبة متزايدة تماماً، كما أن: $t > 0, p \geq 1$.

**تعريف (4) النظيم في الفضاء $L^p$ [1,2,3,4,11]:**

إذا كانت $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ فإن النظيم في الفضاء $L^p$ يأخذ الشكل:

$$\|f(x)\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \; ; 1 \leq p \ldots . (1)$$

**تعريف (5) درجة تقريب دوال صفوف ليبشتز [3,4,6]:**

تعطى درجة تقريب دوال صفوف ليبشتز حيث $\{f \in L^p \,, p \geq 1\}$ بالعلاقة:

$$E_n(f) = \min_{t_n} \|f(x) - t_n(f; x)\|_p$$

حيث إن $t_n(f; x)$ تمثل تحويل المؤثر المدروس، والمطبق على الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة فوريه للدالة $f$، وتسمى درجة التقريب هنا بتقريبات فوريه المثلثية.

الآن:

لتكن لدينا الدالة $f$ دورية دورها $2\pi$ وكمولة لوبيغياً على الفترة $[-\pi, \pi]$.

ومتسلسلة فوريه لها تأخذ الشكل الآتي [7,8]:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$$

ومرافقتها تكتب بالشكل [6,7,8,9]:

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cos nx - a_n \sin nx) = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n(x)$$

## النتائج:

لنضع بدايةً العلاقات المفيدة الآتية:

$$\phi(t) = \phi(t, x) = f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)$$

$$\psi(t) = \psi(t, x) = f(x + t) - f(x - t)$$

$$t_n^{(E,p,q)_\lambda} = \sum_{k=0}^{\lambda(n)} \frac{\binom{\lambda(n)}{k}}{(p+q)^{\lambda(n)}} p^k q^{\lambda(n)-k} S_k$$

$$\bar{t}_n^{(E,p,q)_\lambda} = \sum_{k=0}^{\lambda(n)} \frac{\binom{\lambda(n)}{k}}{(p+q)^{\lambda(n)}} p^k q^{\lambda(n)-k} \bar{S}_k$$

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\lambda(n)} \binom{\lambda(n)}{k} p^k q^{\lambda(n)-k} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) t$$

$$\bar{S}(t) = \sum_{k=0}^{\lambda(n)} \binom{\lambda(n)}{k} \; p^k q^{\lambda(n)-k} \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) t$$

**مبرهنة (1):**

إذا كانت الدالة $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دورية دورها $2\pi$، وكمولة لوبيغياً وتنتمي إلى الصف: $\{Lip\,(\xi(t), p); p > 1\}$ وكان:

$$\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}\left(\frac{t|\xi(t)|}{t^{\frac{1}{p}}}\right)^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} = O\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}\right)\right)$$

$$\left\{\int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}^{\pi}\left(\frac{|\xi(t)|}{t^{\frac{1}{p}+2}}\right)^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} = O\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}\right)\lambda(n)\right)$$

عندئذٍ تعطى درجة تقريب الدالة $f$ باستخدام وسائط أولر الجزئية المعممة $(E,p,q)_\lambda$ المطبقة على متسلسلة فوريه بالشكل:

$$\left\| t_n^{(E,p,q)_\lambda}(f;x) - f(x)\right\|_p = O\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}\right)\left(\lambda(n)\right)^{\frac{1}{2p}}\right)$$

**مبرهنة (2):**

إذا كانت الدالة $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ دورية دورها $2\pi$، وكمولة لوبيغياً وتنتمي إلى الصف: $\{Lip\ (\xi(t),p);p>1\}$ وكان:

$$\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}\left(\frac{t|\xi(t)|}{t^{\frac{1}{p}}}\right)^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} = O\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}\right)\right)$$

$$\left\{\int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}^{\pi}\left(\frac{|\xi(t)|}{t^{\frac{1}{p}+2}}\right)^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} = O\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}\right)\lambda(n)\right)$$

عندئذٍ تعطى درجة تقريب الدالة $\bar{f}$ المرافقة للدالة $f$، باستخدام وسائط أولر الجزئية $(E,p,q)_\lambda$ المطبقة على مرافقة متسلسلة فوريه بالشكل:

$$\left\| \bar{t}_n^{(E,p,q)_\lambda}(\bar{f};x) - \bar{f}(x)\right\|_p = O\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}\right)\left(\lambda(n)\right)^{\frac{1}{2p}}\right)$$

لنثبت التمهيديات الآتية، حيث سنعتمد عليهما في إثبات المبرهنتين (1) و(2).

**تمهيدية (1):**

من أجل $0 < t \le \pi$ عندئذٍ:

$$(p+q)^{-\lambda(n)}\left(p^2+q^2+2\,pq\cos t\right)^{\frac{\lambda(n)}{2}} \le e^{-2pq\frac{\lambda(n)}{(\pi(p+q))^2}t^2}$$

الإثبات: ضمن شروط هذه التمهيدية يمكننا أن نكتب: $\sin\frac{t}{2} \ge \frac{t}{\pi}$.

لدينا الآن:

$$(p+q)^{-2}\left(p^2+q^2+2\,pq\cos t\right) = \frac{p^2+q^2+2\,pq\cos t}{(p+q)^2}$$

$$= \frac{p^2+q^2+2pq+2\,pq\cos t-2pq}{(p+q)^2}$$

$$= 1-\frac{2pq\,(1-\cos t)}{(p+q)^2} = 1-\frac{4pq\sin^2\frac{t}{2}}{(p+q)^2}$$

$$\leq 1-\frac{4pq\,t^2}{\pi^2(p+q)^2} \leq e^{-\frac{4pq\,t^2}{\pi^2(p+q)^2}}$$

حيث إن: $\{1-x \leq e^{-x}\,;0<x<1\}$ ومنه:

$$(p+q)^{-\lambda(n)}\left(p^2+q^2+2\,pq\cos t\right)^{\frac{\lambda(n)}{2}} \leq e^{-2pq\frac{\lambda(n)}{(\pi(p+q))^2}t^2}$$

**تمهيدية (2):**

$.f \in Lip\,(\xi(t),p) \Rightarrow \phi \in Lip\,(\xi(t),p)$

**الإثبات:**

$$\phi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$$
$$\phi(x)=f(u+x)+f(u-x)-2f(u)$$
$$\phi(x+t)=f(u+x+t)+f(u-x-t)-2f(u)$$
$$\begin{aligned}|\phi(x+t)-\phi(x)| &= |f(u+x+t)+f(u-x-t)-2f(u)-f(u+x)-f(u-x)\\ &\quad +2f(u)|\\ &\leq |f(u+x+t)-f(u+x)|+|f(u-x)-f(u-x-t)|\end{aligned}$$

وبالاعتماد على متراجحة مينكوفسكي:

$$\left(\int_0^{2\pi}|\phi(x+t)-\phi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^{2\pi}|f(u+x+t)-f(u+x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^{2\pi}|f(u-x)-f(u-x-t)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

لكن $f \in Lip\,(\xi(t),p)$ ومنه

$$\left(\int_0^{2\pi}|\phi(x+t)-\phi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq O\big(\xi(t)\big)+O\big(\xi(t)\big)=O\big(\xi(t)\big) \Rightarrow \phi \in Lip\,(\xi(t),p)$$

**تمهيدية (3):**

$.f \in Lip\,(\xi(t),p) \Rightarrow \psi \in Lip\,(\xi(t),p)$

**الإثبات:**

$$\psi(t)=f(x+t)-f(x-t)$$
$$\psi(x)=f(u+x)-f(u-x)$$
$$\psi(x+t)=f(u+x+t)-f(u-x-t)$$
$$\begin{aligned}|\psi(x+t)-\psi(x)| &= |f(u+x+t)-f(u-x-t)-f(u+x)+f(u-x)|\\ &\leq |f(u+x+t)-f(u+x)|+|f(u-x)-f(u-x-t)|\end{aligned}$$

وبالاعتماد على متراجحة مينكوفسكي:

$$\left(\int_0^{2\pi}|\psi(x+t)-\psi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_0^{2\pi}|f(u+x+t)-f(u+x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^{2\pi}|f(u-x)-f(u-x-t)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

لكن $f \in Lip\ (\xi(t),p)$ ومنه

$$\left(\int_0^{2\pi}|\psi(x+t)-\psi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le O\big(\xi(t)\big) + O\big(\xi(t)\big) = O\big(\xi(t)\big) \Rightarrow \psi \in Lip\ (\xi(t),p)$$

**المناقشة:**

**إثبات المبرهنة (1):**

إن متتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة فوريه تأخذ الشكل [3,4,7,8]:

$$S_k(f;x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\phi(t)\frac{sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{sin\frac{1}{2}t}dt$$

وبتطبيق تحويل طريقة أولر الجزئية المعممة $(E,p,q)_\lambda$ على الطرفين نجد أن:

$$t_n^{(E,p,q)_\lambda}(f;x)-f(x)=$$

$$=\frac{1}{(p+q)^{\lambda(n)}}\sum_{k=0}^{\lambda(n)}\binom{\lambda(n)}{k}p^k q^{\lambda(n)-k}\{S_k(f;x)-f(x)\}$$

$$=\frac{1}{\pi(p+q)^{\lambda(n)+1}}\int_0^{\pi}\frac{\phi(t)}{sin\frac{1}{2}t}\left\{\sum_{k=0}^{\lambda(n)}\binom{\lambda(n)}{k}p^k q^{\lambda(n)-k}\,sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right\}dt$$

$$=\frac{1}{\pi(p+q)^{\lambda(n)+1}}\int_0^{\pi}\frac{\phi(t)}{sin\frac{1}{2}t}S(t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi(p+q)^{\lambda(n)+1}}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}+\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\pi}\right)\frac{\phi(t)}{sin\frac{1}{2}t}S(t)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\big(I_1(x)+I_2(x)\big)$$

$$\frac{S(t)}{(p+q)^{\lambda(n)}}\le\frac{1}{(p+q)^{\lambda(n)}}\left|\sum_{k=0}^{\lambda(n)}\binom{\lambda(n)}{k}p^k q^{\lambda(n)-k}\,e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)t}\right|=\frac{|q+pe^{it}|^{\lambda(n)}}{(p+q)^{\lambda(n)}}\ ;\ \left|e^{i\frac{t}{2}}\right|=1$$

$$=\frac{(p^2+q^2+2pq\ cos\,t)^{\frac{\lambda(n)}{2}}}{(p+q)^{\lambda(n)}}$$

$$\le e^{-2pq\frac{\lambda(n)}{\left(\pi(p+q)\right)^2}t^2}$$

وذلك حسب التمهيدية (1).

باستخدام متراجحة هولدر، والاستفادة من كون $\phi \in Lip\ (\xi(t), p)$، ومن الشرط:
$\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}\left(\frac{t|\xi(t)|}{t^{\frac{1}{p}}}\right)^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} = O\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}\right)\right)$، ومن مبرهنة القيمة الوسطى الثانية، نجد:

$$|I_1(x)| = O\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}|\xi(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \times \left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\left(\frac{\frac{S(t)}{(p+q)^{\lambda(n)}}}{sin\frac{1}{2}t}\right)^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}$$

حيث $q = \frac{p}{p-1}$ أو $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ومنه:

$$|I_1(x)| = O\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}\left|\frac{\xi(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\right|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \times \left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\left(\frac{e^{-2pq\frac{\lambda(n)}{(\pi(p+q))^2}t^2}}{\left|sin\frac{1}{2}t\right|}\right)^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= O\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}\right)\right)\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}} t^{-q}\, dt\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= O\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}\right)(\lambda(n))^{\frac{1}{2p}}\right)$$

$$|I_2(x)| = O\left(\int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}^{\pi}\frac{|\xi(t)|}{sin\frac{1}{2}t}(p+q)^{-\lambda(n)}(p^2+q^2+2pq\ \cos t)^{\frac{\lambda(n)}{2}}dt\right)$$

$$= O\left(\int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}^{\pi}\frac{|\xi(t)|}{sin\frac{1}{2}t}e^{-2pq\frac{\lambda(n)}{(\pi(p+q))^2}t^2}dt\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{\lambda(n)}\int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}^{\pi}\frac{|\xi(t)|}{sin\frac{1}{2}t}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-2pq\frac{\lambda(n)}{(\pi(p+q))^2}t^2}\right)\right\}dt\right)$$

باستخدام متراجحة هولدر، وبالاستفادة من كون $\phi \in Lip\ (\xi(t), p)$، ومن الشرط:
$\left\{\int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}^{\pi}\left(\frac{|\xi(t)|}{t^{\frac{1}{p}+2}}\right)^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} = O\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}\right)\lambda(n)\right)$، نجد:

$$|I_2(x)| = O\left\{\frac{1}{\lambda(n)}\int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}^{\pi}\left(\frac{|\xi(t)|}{t^{\frac{1}{p}+2}}\right)^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \times \left\{\int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}^{\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-2pq\frac{\lambda(n)}{(\pi(p+q))^2}t^2}\right)\right\}^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= O\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}\right)(\lambda(n))^{\frac{1}{2p}}\right)$$

إذن: $\left\|t_n^{(E,p,q)\lambda}(f;x) - f(x)\right\|_p = O\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}\right)(\lambda(n))^{\frac{1}{2p}}\right)$

وهو المطلوب إثباته.

**إثبات المبرهنة (2):**

إن متتالية المجاميع الجزئية لمرافقة متسلسلة فوريه تأخذ الشكل [5,6,7,8,9]:

$$\bar{S}_k(f;x)-\bar{f}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}dt$$

وبتطبيق تحويل طريقة أولر الجزئية المعممة $(E,p,q)_\lambda$ على الطرفين نجد أن:

$$\bar{t}_n^{(E,p,q)_\lambda}(f;x)-\bar{f}(x)=\frac{1}{(p+q)^{\lambda(n)}}\sum_{k=0}^{\lambda(n)}\binom{\lambda(n)}{k}p^kq^{n-k}\{\bar{S}_k(f;x)-\bar{f}(x)\}$$

$$=\frac{1}{\pi(p+q)^{\lambda(n)+1}}\int_0^{\pi}\frac{\psi(t)}{\sin\frac{1}{2}t}\left\{\sum_{k=0}^{\lambda(n)}\binom{\lambda(n)}{k}p^kq^{n-k}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right\}dt$$

$$=\frac{1}{\pi(p+q)^{\lambda(n)+1}}\int_0^{\pi}\frac{\psi(t)}{\sin\frac{1}{2}t}\bar{S}(t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi(p+q)^{\lambda(n)+1}}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}+\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\pi}\right)\frac{\psi(t)}{\sin\frac{1}{2}t}\bar{S}(t)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\bar{I}_1(x)+\bar{I}_2(x)\right)$$

$$\frac{\bar{S}(t)}{(p+q)^{\lambda(n)}}\le\frac{1}{(p+q)^{\lambda(n)}}\left|\sum_{k=0}^{\lambda(n)}\binom{\lambda(n)}{k}p^kq^{n-k}e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)t}\right|=\frac{\left|q+pe^{it}\right|^{\lambda(n)}}{(p+q)^{\lambda(n)}}\;;\;\left|e^{i\frac{t}{2}}\right|=1$$

$$=\frac{(p^2+q^2+2pq\cos t)^{\frac{\lambda(n)}{2}}}{(p+q)^{\lambda(n)}}\le e^{-2pq\frac{\lambda(n)}{(\pi(p+q))^2}t^2}$$

وذلك حسب التمهيدية (1).

باستخدام متراجحة هولدر، وبالاستفادة من كون $\phi\in Lip\,(\xi(t),p)$، ومن الشرط: $\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}\left(\frac{t|\xi(t)|}{t^{\frac{1}{p}}}\right)^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}=O\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}\right)\right)$، ومن مبرهنة القيمة الوسطى الثانية، نجد أن:

$$|\bar{I}_1(x)|=O\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}|\xi(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}\times\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\left(\frac{\frac{\bar{S}(t)}{(p+q)^{\lambda(n)}}}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}$$

حيث: $q=\frac{p}{p-1}$ ومنه:

$$|\bar{I}_1(x)|=O\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}\left|\frac{\xi(t)}{t^{\frac{1}{p}}}\right|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}\times\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\left(\frac{e^{-2pq\frac{\lambda(n)}{(\pi(p+q))^2}t^2}}{\left|\sin\frac{1}{2}t\right|}\right)^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$=O\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}\right)\right)\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}t^{-q}\,dt\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$=O\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}\right)(\lambda(n))^{\frac{1}{2p}}\right)$$

$$|\bar{I}_2(x)|=O\left(\int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}^{\pi}\frac{|\xi(t)|}{\sin\frac{1}{2}t}(p+q)^{-\lambda(n)}(p^2+q^2+2pq\cos t)^{\frac{\lambda(n)}{2}}dt\right)$$

$$= O\left(\int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}^{\pi} \frac{|\xi(t)|}{\sin\frac{1}{2}t} e^{-2pq\frac{\lambda(n)}{(\pi(p+q))^2}t^2} dt\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{\lambda(n)} \int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}^{\pi} \frac{|\xi(t)|}{\sin\frac{1}{2}t} \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-2pq\frac{\lambda(n)}{(\pi(p+q))^2}t^2}\right)\right\} dt\right)$$

باستخدام متراجحة هولدر، وبالاستفادة من كون $\psi \in Lip\ (\xi(t), p)$، ومن الشرط:

$\left\{\int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}^{\pi} \left(\frac{|\xi(t)|}{t^{\frac{1}{p}+2}}\right)^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} = O\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}\right)\lambda(n)\right)$، نجد:

$$|\bar{I}_2(x)| = O\left\{\frac{1}{\lambda(n)} \int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}^{\pi} \left(\frac{|\xi(t)|}{t^{\frac{1}{p}+2}}\right)^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \times \left\{\int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}}^{\pi} \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-2pq\frac{\lambda(n)}{(\pi(p+q))^2}t^2}\right)\right\}^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= O\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}\right)(\lambda(n))^{\frac{1}{2p}}\right)$$

إذن:

$$\left\|\bar{t}_n^{(E,p,q)_\lambda}(\bar{f};x) - \bar{f}(x)\right\|_p = O\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}\right)(\lambda(n))^{\frac{1}{2p}}\right)$$

بهذا الشكل يكتمل إثبات المبرهنتين (1) و(2).

ونستنتج من خلال المبرهنتين السابقتين ما يلي:

1- بوضع $p = 1$ في الطريقة $(E,p,q)_\lambda$ نحصل على طريقة أولر الجزئية $(E,q)_\lambda$ حيث $q \geq 1$.

2- بوضع $p = q = 1$ في الطريقة $(E,p,q)_\lambda$ نحصل على طريقة أولر الجزئية $(E,1)_\lambda$.

3- بوضع $\lambda(n) = n$ في الطريقة $(E,p,q)_\lambda$ نحصل على طريقة أولر المعممة $(E,p,q)$.

4- بوضع $p = 1$ في الطريقة $(E,p,q)$ نحصل على طريقة أولر $(E,q)$ حيث $q \geq 1$.

5- بوضع $p = q = 1$ في الطريقة $(E,p,q)$ نحصل على طريقة أولر $(E,1)$

وضمن النتائج السابقة نستطيع إثبات مبرهنات مماثلة تماماً للمبرهنتين (1) و(2) وذلك باستخدام كل من الطرائق $(E,q)_\lambda$، $(E,1)_\lambda$، $(E,p,q)$، $(E,q)$، $(E,1)$.

**الخلاصة:** في هذا البحث قمنا بدراسة طريقة أولر الجزئية المعممة $(E,p,q)_\lambda$، وتمكنّا بواسطتها من تقريب الدالتين: $f$، $\bar{f}$ بالنظيم في الفضاء: $L^p$، وذلك إلى الدرجة: $O\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(n)}}\right)(\lambda(n))^{\frac{1}{2p}}\right)$ والتي تختلف وفقاً للطريقة والفضاء المدروسين.

**التوصيات:**

يمكننا دراسة درجات تقريب صفوف ليبشتز المختلفة [12,13]، باستخدام طريقة أولر الجزئية، أو أي طريقة جزئية أخرى كطريقة نيورلند الجزئية وطريقة سيزارو الجزئية والطريقة المصفوفية الجزئية والتي تعطى على الترتيب كما يلي [1,2]:

$$t_n^{(N,p_n)_\lambda} = \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{k=0}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-k} S_k$$

$$t_n^{(C,1)_\lambda} = \frac{1}{\lambda(n)+1} \sum_{k=0}^{\lambda(n)} S_k$$

$$t_n^{(A)_\lambda} = \sum_{k=0}^{\lambda(n)} a_{\lambda(n),k} S_k$$

## المراجع:


[1] S. Z. Jafarov, Approximation By Means Of Fourier Trigonometric Series In Weighted Lebesgue Spaces, 13, 217-226, 2017.

[2] M. L. Mittal, M. V. Singh, Approximation of Sesaro Submethod Trigonometric Approximation of Signals (Functions) Belonging To Class $Lip\ (\alpha, p)$ in $L_p$-norm, 1-7, 2016.

[3] B. P. Dhakal, Using the Matrix Summability Method to Approximate the $Lip\ (\xi(t), p)$ Class Functions, vol 2, 198-201, 2014.

[4] V. N. Mishra, K. Khatri, Using linear operators to approximate signals of $Lip\ (\xi(t), p)\ ;\ (p \geq 1)$-class, 353-363, 2013.

[5] S. lal, P. narainsingh, Degree Of Approximation Of Conjugate Of $Lip(\alpha, p)$ Function By $(C, 1)(E, 1)$ Means Of Conjugate Series Of A Fourier Series, *Tamkang Journal Of Mathematics*, Vol 33, No 3, 269-274, 2002.

[6] S. Lal, Degree of Approximation of Conjugate of A Function Belonging to $Lip(\xi(t), p)$ Class by Matrix Summability Means of Conjugate Fourier Series, 555-563, 2000.

[7] B. Kenneth,Howell, *Principles Of Fourier Series Analysis*, 774, 2001.

[8] A.zygmund, *Trigonometric series*, Combridge University Press,combridge, 1959.

[9] Włodzimierz Łenski, Bogdan Szal, Pointwise approximation of modified conjugate functions by matrix operators of their Fourier series, 67, 1, 50-60, 2018.

[10] S. Lal, J. Kumar Kushwaha, degree Approximation of Functions Belonging To Generalized $Lip\ (\xi(t), r)$ Class Using Lower Triangular Matrix Summability Method, *International Journal of Engineering Science and Technology*, 3, 7, 5531-5538, 2011.

[11] R. Mohapatra, B. Szal, on Trigonometric approximation of function in $L^q$-norm, 13-676, 2018.

[12] U. Singh, S. K. Srivastava, Degree of Approximation of functions in Lipschitz class with Muckenhoupt Weights by Matrix Means, *International Journal of Applied Mathematics*, 43, 4, 1041-1047, 2013.

[13] V. N. Mishra, K. Khatri, L. N. Mishra, Using linear operators to approximate signals of $Lip\ (\alpha, p)\ ;\ (p \geq 1)$-class, 353-363, 2013.