مجلة العلوم الطبيعية والحياتية والتطبيقية
العدد الأول – المجلد الثالث
مارس 2019 م
ISSN: 2522-3356

المجلة العربية للعلوم و نشر الأبحاث
Arab Journal of Sciences & Research Publishing
AJSRP

دراسة في جموعية مشتقة متسلسلة فوريه ومرافقتها بالطريقة المصفوفية

محمد محمود عامر

قسم الرياضيات || كلية العلوم || جامعة البعث || سوريا

الملخص: هناك أنواع عديدة من المعايير وضمن شروط متنوعة لجموعية مشتقة متسلسلة فوريه ومرافقتها بالطريقة المصفوفية، وسوف ندرس هنا نوع هام ومختلف من المعايير لجموعية مشتقة متسلسلة فوريه ومرافقتها، حيث سنعتبر أن الدالة $f(x)$ دورية دورها 2π وقابلة للمكاملة وفق ليبيغ على المجال $[-\pi,\pi]$.

والمصفوفة $\mathrm{T}=(\mathrm{a}_{\mathrm{n,k}})$ نظامية، وسنثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} nB_n(x)$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية إلى المجموع $O(1)$ وهو عبارة عن دالة محدودة كما سنرى لاحقاً، وأن المتسلسلة $-\sum_{n=1}^{\infty} nA_n(x)$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية إلى المجموع: $-\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} h(t).cosec^2\frac{1}{2}tdt+O(1)$.

الكلمات المفتاحية: مشتقة متسلسلة فوريه، مرافقة مشتقة متسلسلة فوريه، مصفوفة توبلتز، الاستمرار المطلق، الجموعية المصفوفية، مبرهنة ريمان ليبيغ، مصفوفة هانكل، زيغموند.

المقدمة:

تعد متسلسلات فوريه إحدى النظريات الهامة في التحليل الحديث، ولا يغيب عنا الدور الهام الذي تلعبه المؤثرات الخطية المحدودة (طرائق الجموعية) في هذه النظرية، وفي هذا المجال تم الحصول على نتائج أساسية باستخدام العديد من الطرائق كطرائق سيزارو ونيورلند وريس، وستتم دراستنا في هذا البحث باستخدام المؤثر المصفوفي أو ما يعرف بالطريقة المصفوفية والتي تعتبر واحدة من أهم طرائق الجموعية بل هي الطريقة العامة في الجموعية وكل الطرائق السابقة ما هي إلا حالات خاصة منها.

مشكلة البحث:

تباعد مشتقة متسلسلة فوريه البسيطة ومرافقتها وعدم كفاءة الطرائق الأخرى في إيجاد مجموع بعض هذه المتسلسلات واقتصار الدراسات السابقة على دراسة قابلية جمع متسلسلة فوريه ومرافقتها.

مواد البحث وطرائقه:

تعريف الطريقة المصفوفيّة [7]:

تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{u_n}$ جموعية إلى المجموع S بالطريقة المصفوفيّة التي مصفوفتها $\mathrm{T}=(\mathrm{a}_{\mathrm{n,k}})$ إذا كان $\lim_{n\to\infty}\mathrm{t_n}=\mathrm{S}$ حيث إن:

$$\mathrm{S_n}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{u_k}\ ,\mathrm{t_n}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{a_{n,k}}\,\mathrm{S_k}\quad(1)$$

والمصفوفة $\mathrm{T}=(\mathrm{a}_{\mathrm{n,k}})$ ليست مثلّثيّة بشكل عام.

تعريف (1) [8]: نقول عن طريقة في الجموعية إنها نظامية إذا أدى تطبيقها على متسلسلة متقاربة إلى المجموع المعتاد لهذه المتسلسلة.

من المبرهنات الهامة في هذا المجال مبرهنة النهاية لتوبلتز (Toeplitz).

مبرهنة (1): [7]

الشرط اللازم والكافي لكي تكون الطريقة المصفوفيّة نظامية هو أن تحقق مصفوفتها $T=\left(a_{n,k}\right)$ الشروط التالية:

1- $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}=1$

2- $\lim_{n\to\infty} a_{n,k}=0\ ;k=1,2,\ldots$

3- $\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{n,k}\right|\leq M\ ;\ n=1,2,\ldots$

(حيث إن M ثابت لا يتعلق بـ n).

أمثلة:

1- مصفوفة توبلتز (Toeplitz) [7]: وهي عبارة عن مصفوفة مثلثية سفلى غير منتهية من الأعداد الحقيقية وتحقق هذه المصفوفة الشروط النظامية، وتكتب بالشكل:

$$T=\left(a_{n,k}\right)\ ;\ \left(a_{n,k}=0\ ;\ k>n\right)$$

2- مصفوفة هانكل:(Hankel) [1] لتكن $\{h_n\}$ متتالية غير منتهية من الأعداد الحقيقية، عندئذٍ تعرّف مصفوفة هانكل H بالشكل:

$$H=\left(a_{n,k}\right)=\left(h_{n+k-1}\right)$$

خواص الطريقة المصفوفية (النظامية):

$$1.\ \sum_{n=0}^{\infty}u_n=A\ (T)\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}au_n=aA\ (T)$$

$$2.\ \sum_{n=0}^{\infty}u_n=A_1\ (T)\ \Lambda\ \sum_{n=0}^{\infty}v_n=A_2\ (T)$$

$$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(u_n+v_n)=A_1+A_2\ \ (T)$$

$$3.\ \sum_{n=0}^{\infty}u_n=A_1\ \ (S)\ \Lambda\sum_{n=0}^{\infty}u_n=A_2\ (T)\ \Rightarrow A_1=A_2$$

تعريف الرموز (O,o): [8]

لتكن v_n,u_n متتاليتين عدديتين (u_n موجبة)، عندئذ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=0\ \Leftrightarrow v_n=o(u_n)\ (2)$$

$$\{\text{محدودة}\ \left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n\geq 0}\ \text{المتتالية}\}\Leftrightarrow v_n=O(u_n)\ (3)$$

مبرهنة (2) "ريمان-ليبيغ": [5]

بفرض f و g دالتان دوريتان دور كل منهما 2π وf كمولة لوبغياً، و g ذات تغيرات محدودة عندئذٍ من أجل أي a و b بحيث $-\pi \leq a \leq b \leq \pi$ وأي θ فإن:

$$\int_a^b f(\ \theta + t).g(t).\cos(nt)\,dt\ (4)$$

$$\int_a^b f(\ \theta + t).g(t).\sin(nt)\,dt\ (5)$$

معاً ينتهيان إلى الصفر بانتظام في a, b, θ عندما تنتهي n إلى ∞.

علاوة على ذلك كلا المتتاليتين محدودة بانتظام في a, b, θ و n.

تعريف متسلسلة فوريه للدالة $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)\ \ (6)$$

مشتقة متسلسلة فوريه، ونحصل عليها باشتقاق متسلسلة فوريه حداً حداً وتأخذ الشكل التالي [1,2]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n(x)\ \ (7)$$

ومرافقة مشتقة متسلسلة فوريه تعطى بالعلاقة [3]:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = -\sum_{n=1}^{\infty} nA_n(x)\ \ (8)$$

ونحصل على المرافقة من خلال العلاقة الآتية [3]:

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2\tan\frac{t}{2}}\,dt\ \ (9)$$

والتي تعطي مرافقة أي دالة دورية.

النتائج:

لتكن f كمولة لوبغياً ودورية دورها 2π، ولتكن $\sum_{n=1}^{\infty} nB_n(x)$ مشتقة متسلسلة فوريه لهذه الدالة، ولتكن:

$$\acute{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kB_k(x) \qquad\qquad (7-a)$$

متتالية مجاميعها الجزئية، ولتكن $-\sum_{n=1}^{\infty} nA_n(x)$ مرافقة مشتقة متسلسلة فوريه ومتتالية مجاميعها الجزئية تعطى بالعلاقة:

$$\overline{\acute{S}_n(x)} = -\sum_{k=1}^{n} kA_k(x) \qquad (8-a)$$

ولنضع العلاقات:

$$\psi(t) = f(x+t) - f(x-t) \qquad (7-b)$$

$$\phi(t) = f(x+t) - f(x-t) - 2f(x) \qquad (8-b)$$

$$g(t) = \frac{\psi(t)}{4\sin\frac{t}{2}} \qquad (7-c)$$

$$h(t) = \frac{\phi(t)}{4\sin\frac{t}{2}} \qquad (8-c)$$

ولنثبت المبرهنتين الآتيتين:

مبرهنة (3):

لتكن $T = \left(a_{n,k}\right)$ مصفوفة مثلثية نظامية (مصفوفة Toeplitz) غير منتهية من الأعداد الحقيقية، عندئذٍ إذا كانت $x \in [-\pi, \pi]$، وكانت الدالة $g(t)$ مستمرة بإطلاق (مطلقاً) على المجال $[0, \pi]$، فإن

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}.\acute{S}_n(x) = O(1) \quad (7-d)$$

مبرهنة (4):

لتكن $T = \left(a_{n,k}\right)$ مصفوفة مثلثية نظامية (مصفوفة Toeplitz) غير منتهية من الأعداد الحقيقية، عندئذٍ إذا كانت $x \in [-\pi, \pi]$، وكانت الدالة $h(t)$ مستمرة بإطلاق (مطلقاً) على المجال $[0, \pi]$، فإن

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}.\overline{\acute{S}_n(x)} = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} \phi(t).\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}t\,dt + O(1) \quad (8-d)$$

إثبات المبرهنة (3):

إن متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} nB_n(x)$ تعطى كما يأتي [6]:

$$\acute{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k(b_k\cos kx - a_k\sin kx)\,\acute{S}_n(x)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi(t).\,d\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t.\operatorname{cosec}\frac{t}{2}\right) \quad (7-e)$$

وبالتالي فإن:

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}. \acute{S}_k(x) \quad (7-f)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}. \left(-\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \psi(t).\, d\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right) t.\operatorname{cosec}\frac{t}{2} \right) \right) \quad (7-g)$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} a_{n,k}. \left(-\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \psi(t). \left\{ \left(k+\frac{1}{2}\right) \cos\left(k+\frac{1}{2}\right) t.\operatorname{cosec}\frac{t}{2} dt \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sin\left(k+\frac{1}{2}\right) t.\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\cot\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} dt \right\} \right) \quad (7-h)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}. \left(-\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \psi(t). \left(k+\frac{1}{2}\right) \cos\left(k+\frac{1}{2}\right) t. \frac{1}{\sin\frac{t}{2}} dt \right)$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}. \left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \psi(t).\sin\left(k+\frac{1}{2}\right) t.\cot\frac{t}{2}.\operatorname{cosec}\frac{t}{2} dt \right) \quad (7-i)$$

$$= -\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\pi} a_{n,k}.\, g(t). \left(k+\frac{1}{2}\right) \cos\left(k+\frac{1}{2}\right) t dt \right\}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \left\{ \frac{4}{4\pi} \int_0^{\pi} g(t).\sin\left(k+\frac{1}{2}\right) t.\cot\frac{t}{2} dt \right\} \quad (7-j)$$

حيث إن:

$$\cot\frac{t}{2} = \operatorname{cosec}\frac{t}{2} - \tan\frac{t}{4} \text{ أو } \cot\frac{t}{2} = \frac{1}{\sin\frac{t}{2}} - \tan\frac{t}{4}$$

وذلك لأن:

$$L_2 = \operatorname{cosec}\frac{t}{2} - \tan\frac{t}{4} = \frac{1}{\sin\frac{t}{2}} - \tan\frac{t}{4} = \frac{1-\sin\frac{t}{2}.\tan\frac{t}{4}}{\sin\frac{t}{2}}$$

$$= \frac{1 - 2\sin\frac{t}{4}.\cos\frac{t}{4}.\frac{\sin\frac{t}{4}}{\cos\frac{t}{4}}}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{1-2\sin^2\frac{t}{4}}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \cot\frac{t}{2} = L_1$$

$$\Rightarrow t_n = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\int_0^{\pi} a_{n,k}.\, g(t).\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t.\operatorname{cosec}\frac{t}{2}dt\right\}$$
$$-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\int_0^{\pi} a_{n,k}.\, g(t).\left(k+\frac{1}{2}\right)\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)tdt\right\}$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\int_0^{\pi} a_{n,k}.\, g(t).\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t.\tan\frac{t}{4}dt\right\}$$
$$= t_{n,1} + t_{n,2} + t_{n,3} \ (10)$$

باستخدام الشروط النظامية ومن الفرض نجد أن الدالة $g(t)$ محدودة على المجال $[0,\pi]$ وبالتالي

$t_{n,1} = O(1)\ (10-a)$ عندما $n \to \infty$ حيث $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}dt = 1$.

كما أن $(10-b)\ 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} t_{n,3}$ وذلك حسب مبرهنة ريمان – ليبيغ للجموعية بالطريقة النظامية.

ولنثبت أن $t_{n,2} = O(1)$ وذلك عندما $n \to \infty$ وعندها يتم المطلوب.

لنكامل الآن $t_{n,2}$ بالتجزئة:

$$-t_{n,2} = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\int_0^{\pi} a_{n,k}.\, g(t).\left(k+\frac{1}{2}\right)\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)tdt\right\}$$

نفرض أن: $u = g(t)\ , dv = \left(k+\frac{1}{2}\right)\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)tdt$

$$\Rightarrow -t_{n,2} = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}.\left\{g(t).\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right\}\Big|_0^{\pi}$$
$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}.\int_0^{\pi}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\, d\, g(t)$$
$$= -\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}.\, g(\pi).\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$$
$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}.\int_0^{\pi}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\, d\, g(t)$$
$$= -\frac{2}{\pi}g(\pi).\cos k\pi\,.\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}.\, I_k = O(1) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}.\, I_k$$

حيث إن:

$$I_k = \int_0^{\pi}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\, d\, g(t)$$

ولنثبت أن $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}.\, I_k = O(1)$ فنحصل على المطلوب.

بما أن الدالة $g(t)$ ذات تغيرات محدودة في المجال $[0,\pi]$، فإنه من أجل أي $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون $\int_0^{\delta}|dg(t)| < \varepsilon$، وبالتالي:

$$I_k = \int_0^{\pi} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\, d\,g(t) = \int_0^{\delta} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t.\,dg(t) + \int_{\delta}^{\pi} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t.\,dg(t)$$

$$= I_k' + I_k''$$

لدينا الآن $\left|\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right| \le 1$ عندئذ:

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}.\,I_k'\right| \le \sum_{k=0}^{\infty}|a_{n,k}|.\int_0^{\delta}|dg(t)| \le \varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}|a_{n,k}| \le \varepsilon.\,k$$

من جديد بما أن الدالة $g(t)$ مستمرة مطلقاً في المجال $[\delta,\pi]$ ولدينا:

$$\int_{\delta}^{\pi} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t.\,dg(t) = \int_{\delta}^{\pi} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t.\,g'(t)dt$$

فإنه من أجل أي $\varepsilon > 0$ يمكننا اختيار k_0 يحقق:

$$\left|\int_{\delta}^{\pi} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t.\,g'(t)dt\right| < \varepsilon$$

لكل $k < k_0$ وذلك حسب مبرهنة ريمان - ليبيغ. [5]

وبتثبيت k_0 يمكننا أن نأخذ عدد صحيح موجب n_0 بحيث يكون:

$$|a_{n,k}| < \frac{\varepsilon}{k_0+1}\ ;\ 0 \le k \le k_0\ , n > n_0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}.\,I_k''$$

$$= \sum_{k=0}^{k_0} a_{n,k}.\int_{\delta}^{\pi} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t.\,g'(t)dt$$

$$+ \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_{n,k}.\int_{\delta}^{\pi} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t.\,g'(t)dt = I_1 + I_2$$

$$|I_1| \le \sum_{k=0}^{k_0}|a_{n,k}|.\int_{\delta}^{\pi}|g'(t)|dt \le N.\sum_{k=0}^{k_0}|a_{n,k}| \le \frac{N.\,\varepsilon.\,(k_0+1)}{k_0+1} = N.\,\varepsilon$$

$$N = \int_{\delta}^{\pi}|g'(t)|dt\ ; n > n_0$$

$$|I_2| = \left|\sum_{k_0+1}^{\infty} a_{n,k}.\int_{\delta}^{\pi} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\,.\,\acute{g}(t)dt\right|$$

$$\leq N.\sum_{k_0+1}^{\infty}\left|a_{n,k}\right| \leq N.\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{n,k}\right| \leq N.M \ (\text{حسب الشروط النظامية})$$

مما سبق نجد أن:

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}.I_k\right| < N.M + \varepsilon.M + N.\varepsilon = (N+M)\varepsilon + NM$$

من أجل $n > n_0$ مع العلم بأن ε مقدار كيفي.

ومنه نحصل على: $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}.I_k = O(1)\ ;\ (n \to \infty)$

$$\Rightarrow -t_{n,2} = O(1) + O(1) = O(1)$$

$$\Rightarrow -t_{n,2} = O(1)\ (10-c)$$

من $(10-a)$ و $(10-b)$ و $(10-c)$ نحصل على:

$$\Rightarrow t_n = O(1)\ ;\ (n \to \infty)$$

وهو المطلوب إثباته.

إثبات المبرهنة (4):

من المعلوم أن متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة المرافقة لمشتقة متسلسلة فوريه تكتب بالشكل: [4]

$$\overline{\acute{S}_n(x)} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,d\phi(t) \quad (8-e)$$

$$\Rightarrow \overline{\acute{S}_n(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \phi(t)\frac{d}{dt}\left(\cot\frac{t}{2} - \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \phi(t)\left(-\frac{1}{2}\left\{1+\cot^2\frac{t}{2}\right\} + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right).\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}.\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 4\sin\frac{t}{2}h(t)\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}} + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right).\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}.\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\right)dt$$

$$= \frac{-1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{h(t)}{\sin\frac{t}{2}}dt$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(t).\left(n+\frac{1}{2}\right).\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h(t).\cot\frac{t}{2}.\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt \quad (8-f)$$

وبالتالي يكون:

$$\overline{t_n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}.\overline{\acute{S_n}(x)} \quad (8-g)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}.\left(\frac{-1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{h(t)}{\sin\frac{t}{2}}dt + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(t).\left(n+\frac{1}{2}\right).\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h(t).\cot\frac{t}{2}.\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt\right)$$

$$= \frac{-1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{h(t)}{\sin\frac{t}{2}}dt.\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^{\pi} a_{n,k}.h(t).\left(n+\frac{1}{2}\right).\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt\right)$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^{\pi} a_{n,k}.h(t).\cot\frac{t}{2}.\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt\right)$$

$$= \overline{t_{n,1}} + \overline{t_{n,2}} + \overline{t_{n,3}} \quad (11)$$

من الواضح أن: $\overline{t_{n,1}} = \frac{-1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{h(t)}{\sin\frac{t}{2}}dt \quad (11-a)$

وبشكل مشابه تماماً لإثبات أن: $t_{n,2} = O(1)$ نجد أن: $\overline{t_{n,2}} = O(1) \ (11-b)$.

كما أن $\overline{t_{n,3}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ (11-c)$ وذلك حسب مبرهنة ريمان – ليبيغ للجموعية بالطريقة النظامية، وبالتالي من $(11-a)$ و $(11-b)$ و $(11-c)$ نحصل على:

$$\lim_{n\to\infty}\overline{t_n} = \frac{-1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{h(t)}{\sin\frac{t}{2}}dt + O(1) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\phi(t).\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}t\,dt + O(1)$$

وهو المطلوب.

الخلاصة:

في هذا البحث تعرفنا على الطريقة المصفوفية وبعض خواصها، وكيفية استخدامها في دراسة جموعية بعض متسلسلات فورييه، ونستنتج أنها من أهم طرائق الجموعية.

كما أنه عند دراسة جموعية متسلسلات فورييه نتصور أن أهم شيء هو الجموعية النظامية، حيث إن دراستها تفيد في العديد من التطبيقات ولا سيما في تحليل الإشارات الدورية لصف الدوال المحققة لشرط ليبشتز، وفي التقريب إلى دوال مستمرة أو إلى دوال من صفوف معينة كصفي ليبشتز وزيغموند.

التوصيات:

يمكننا دراسة متسلسلات أخرى من متسلسلات فورييه كالمشتقة من المرتبة p ومرافقتها، وتكتب هذه الأخيرة بالشكل:

$$f^{(p)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)^{(p)}$$

$$f^{(p)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}k^p\left(\frac{\pi}{L}\right)^p\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}+p\frac{\pi}{2}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}+p\frac{\pi}{2}\right)\right)\quad(12)$$

$$\overline{f^{(p)}(x)}=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)^{(p)}}$$

$$\overline{f^{(p)}(x)}=\sum_{n=1}^{\infty}k^p\left(\frac{\pi}{L}\right)^p\left(-a_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}+p\frac{\pi}{2}\right)+b_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}+p\frac{\pi}{2}\right)\right)\quad(13)$$

ملاحظة: تم الحصول على العلاقتين السابقتين باشتقاق متسلسلة فورييه p مرة، والاستفادة من العلاقتين الآتيتين:

$$\overline{\sin(ax)}=\cos(ax)\ ,\overline{\cos(ax)}=-\sin(ax)$$

المراجع:

- عامر، محمد. كرزون، عبد الهادي. (2015). قابلية جمع مشتقة متسلسلة فورييه ومرافقتها بطريقة نيورلند. مجلة جامعة البعث. المجلد 37. العدد 5، [ص. 1-30.]
- كريزيك، إيروين. (1985). مدخل إلى التحليل الدالي. ترجمة الدكتور خضر حامد الأحمد. [ص. 348- 350.]
- وايدر، دافيد. (1981-1982). الحساب المتقدم. ترجمة الدكتور أنيس كنجو.
- Alotibi, A. Mursaleen, M. (2013). Applications of Hankel and Regular Metrices in Fourier Series. Applied Mathematics & Information Sciences Vol, 6. [P. 1-3.]
- Aribindi, S. R. (1973). matrix summability of a class of Derived fourier series. pacific journal of mathematics. Vol, 48. [P. 481-484.]
- Kalpana, Saxena. Manju, Prabhakar. (2016). A Study of Double Euler Summability Method of Fourier Series and its Conjugate Series. [p. 46-52.]

- Lal, S. Yadav, P. (2002). Matrix Summability Of The Conjugate Series Of Derived Fourier Series. Tamkang Journal Of Mathematics Vol, 33. [P. 35-43.]
- Zygmund, A (2002). Trigonometric Series. , Third Edition, Volume I & II Combined (Cambridge Mathematical Library) Cambridge University Press.

A Study Of Summability Of Derived ourier Series And Its Conjugate By Matrix Method

Abstract: Various types of criteria, under varying conditions, for the Matrix Summability of the derived fourier series, In this paper quite a different and general type of criterion for summability of the Derived Fourier Series has been obtained, in the theorem function f is integrable in the sense of Lebesgue to the interval $[-\pi, \pi]$ and periode with period 2π, and the Matrix, $T = (a_{n,k})$ is regular, and the series $\sum_{n=1}^{\infty} nB_n(x)$ summable in the Matrix mean to the sum $O(1)$, and the series $-\sum_{n=1}^{\infty} nA_n(x)$ summable in the Matrix mean to the sum $-\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} h(t).\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}tdt + O(1)$.

Keywords: Derived Fourier Series, Conjugate Of Derived Fourier Series, Toeplitz Matrix , Absolutely Continuous Matrix Summability, Riemman Lebesgue Theorem, Matrix Hankel, Zygmund.