Arab Journal of Sciences & Research Publishing (AJSRP) • Vol 10, Issue 1 (2024) • P: 52 - 41
https://journals.ajsrp.com/index.php/ajsrp
ISSN: 2518-5780 (Online) • ISSN: 2518-5780 (Print)

# Generalization of the Fibonacci sequence, Pascal's triangle, and the binomial theorem

**Mohammed Elsmani Abdelrahman**
Faculty of Engineering | Department of Mechanics | University of Khartoum | Republic of Sudan
Faisal Ahmed Saleh Al-Rabie Safety Establishment | Al Khafji | Kingdom of Saudi Arabia

**Received**: 19/10/2022
**Revised**: 01/11/2022
**Accepted**: 06/01/2024
**Published**: 30/03/2024

* Corresponding author: almazin149@gmail.com

**Citation**: Abdelrahman, M. E. (2024). Generalization of the Fibonacci sequence, Pascal's triangle, and the binomial theorem. *Arab Journal of Sciences & Research Publishing, 10*(1), 41 – 52. https://doi.org/10.26389/AJSRP.N191022



**Abstract**: This research generalizes the relationship between Pascal's triangle and binomial expansion by using variables instead of numbers. The triangle is formed using variable (d) instead of the zero term (0), variable (a) instead of the first term (1), and variable (m) as a generalization of the binomial theorem. The mathematical patterns resulting from the triangle's formation are studied using these variables, leading to five new mathematical equations: the vertical equation, the hypotenuse equation, the row equation, the sum of the rows equation, and the equation of the golden function sequences. The equation of the golden function sequences is considred an unprecedented generalization of the nth term of the Fibonacci and Lucas sequence. Additionally, a new, unprecedented diamond equation is for mulated, and a new conjecture related to prime numbers is formulated, as it is considered a generalization of Fermat's Little Theorem. This research highlights the need for a more comprehensive understanding of the relationship between Pascal's triangle and binomial expansion.

**Keywords**: golden function, Luca's sequence, Fibonacci sequence, Pascal's triangle, Prime numbers, diamond equation

# تعميم علاقة مثلث باسكال بنظرية ذات الحدين ومتتابعة فيبوناتشي وصياغة حدسية جديدة تخص الأعداد الأولية

**محمد السماني عبد الرحمن**
كلية الهندسة | قسم الميكانيكا | جامعة الخرطوم | جمهورية السودان
مؤسسة فيصل أحمد صالح الربيع للسلامة | الخفجي | المملكة العربية السعودية

**المستخلص:** هدف هذا البحث إلى تعميم العلاقة بين مثلث باسكال وتوسيع ثنائي باستخدام المتغيرات بدلاً من الأرقام. يتم تشكيل المثلث باستخدام المتغير (d) بدلاً من المصطلح الصفري(0) ، والمتغير (a) بدلاً من المصطلح الأول(1) ، والمتغير (m) كتعميم لنظرية الثنائي. يتم دراسة الأنماط الرياضية الناتجة عن تشكيل المثلث باستخدام هذه المتغيرات، مما يؤدي إلى خمسة معادلات رياضية جديدة: معادلة عمودية، معادلة الوتر، معادلة الصف، مجموع معادلات الصفوف، ومعادلة تسلسلات الوظائف الذهبية. تُعتبر معادلة تسلسلات الوظائف الذهبية تعميمًا غير مسبوق للمصطلح الثاني لتسلسل فيبوناتشي وتسلسل لوكاس. بالإضافة إلى ذلك، يُصاغ معادلة جديدة وغير مسبوقة للماس، ويُصاغ افتراض جديد يتعلق بأعداد أولية، حيث يُعتبر تعميمًا لنظرية فيرما الصغرى. يُسلط هذا البحث الضوء على ضرورة فهم أكثر شمولًا للعلاقة بين مثلث باسكال وتوسيع ثنائي.

**الكلمات المفتاحية:** الدالة الذهبية، متتابعة لوكاس، متتابعة فيبوناتشي، مثلث باسكال، الأعداد الأولية، المعادلة الماسية.

## 1. المقدمة.

علم الرياضيات مليء بالتراكيب العددية التي تحتوي على أنماط عددية تشتمل على أسرار لم تكتشف بعد، يعتبر مثلث باسكال [Bondarenko, 1993] أحد هذه التراكيب العددية التي تحتوي على أسرار عديدة، فهو يحتوي على أنماط عددية عديدة نذكر منها على سبيل المثال ؛ قوى العدد (2) [O'Shea, 2016]، وقوى العدد (11) [Islam et al., 2018]، ومتتابعة فيبوناتشي[Freitas et al., 2022]، والأعداد المثلثية والأعداد الهرمية [Cox, 2023]، كما أن له علاقة بعوامل حدود مفكوك نظرية ذات الحدين والتوافيق [Bondarenko, 1993]، ومن الأسرار أيضا في هذا المثلث ما يتعلق بالأعداد الأولية وأن العدد الأولي الموجود بالعمود الأول يقسم جميع الحدود التي معه على نفس الصف [Meisner, 2018]، هذا بعض ما توصل إليه الباحثون حول هذا المثلث.

وجود جميع هذه الأنماط وغيرها في هذا المثلث يدل على إمكانية وجود رابط يربط بينهم جميعا، هذا الرابط عبارة عن معادلات رياضية قدمناها في هذا البحث.

### 2. مشكلة البحث:

إذا جمعنا حدود مثلث باسكال بشكل أفقي فإنه يعطي قوى العدد (2)، ولكن ماذا عن قوى العدد (3) و(4) وغيرهما هل لهم مثلثات خاصة بهم؟ وهل إذا جمعنا الحدود بشكل مائل تنتج لنا متتابعات مثل متتابعة فيبوناتشي في مثلث باسكال؟ وهل هذه الأنماط تحكمها دوال ومعادلات رياضية؟

جميع هذه الإشكالات وغيرها تم الجواب عنها في هذا البحث.

### 3. منهج البحث:

لتعميم علاقة مثلث باسكال بنظرية ذات الحدين ومتتابعة فيبوناتشي، سوف يتم استخدام المنهج الاستقرائي الذي يركز على دراسة الجزئيات للوصول للعموميات عن طريق الملاحظة الدقيقة.

### 4. أهداف البحث:

يهدف البحث إلى تعميم فكرة تكوين مثلث باسكال بحيث يأخذ الحد الصفري والحد الأول قيما متغيرة فتتكون لدينا مثلثات جديدة على حسب تغير قيم الحد الصفري والحد الأول، ثم إيجاد معادلات تربط هذه المتغيرات والاستفادة من ذلك في دراسة المزيد من الأنماط العددية.

### 5. أهمية البحث:

تأتي أهمية البحث من خلال النقاط التالية:

- وجود مثلثات جديدة يعني وجود أنماط عددية جديدة واكتشاف أسرار جديدة.
- تمكننا معرفة المعادلات الرياضية والدوال الحاكمة من دراسة الأنماط الرياضية بصورة أشمل بحيث تدرس كدوال لا كأنماط رياضية فحسب.
- إثراء البحث العلمي حيث تظهر لنا دوال جديدة تحتاج إلى التعمق في الدراسة والبحث، وكذلك دراسة وتعميم كل ما له علاقة بالنسبة الذهبية.

## 6. مواد وطرق البحث:

### 6.1 تعريفات أساسية:

6.1.1 الحد:

هو أي عدد داخل منظومة المثلثات

6.1.2 الحد الصفري (d):

هو عدد ثابت يوجد في العمود الأزرق الفاتح يسار المثلث وهو الذي تبدأ منه عملية تكوين المثلثات.

6.1.3 العمود:

مجموعة الحدود من أعلى إلى أسفل في الاتجاه الرأسي نطلق عليها عمود. ويتكون المثلث من عدد من الأعمدة تبدأ بالعمود الأول أقصى اليسار ثم العمود الثاني يمين العمود الأول، وهكذا إلى ما لانهاية. العمود باللون الأزرق الفاتح يسار المثلث نطلق عليه

العمود الصفري.

6.1.4 الحد الأول: ($\alpha$)

هو الحد الأول في العمود الأول

6.1.5 الوتر:

بما أن المثلث يظهر أنه قائم الزاوية فالأوتار هي مجموعة الحدود المقابلة الزاوية القائمة.

نطلق على أول وتر الوتر الصفري.

6.1.6 الصف:

نطلق على الحدود المتراصة في شكل أفقي من اليسار إلى اليمين صفوف المثلث.

### 6.2 طريقة تكوين المثلث الأزرق:

يتم تكوين المثلث بتكوين أعمدته، ويتم تكوين العمود بجمع الحد في العمود المعين للحد الذي قبله في الصف لينتج لنا الحد الذي بعده في العمود كما هو واضح بالصورة التوضيحية.

### 6.3 طريقة تكوين المثلث البرتقالي:

قبل الشروع في طريقة تكوين المثلث البرتقالي يجب علينا تعريف العدد الثابت (m)

6.3.1 العدد الثابت (m)

هو عدد محدد نضربه في أعمدة المثلث الأزرق لتنتج لنا أعمدة المثلث البرتقالي.

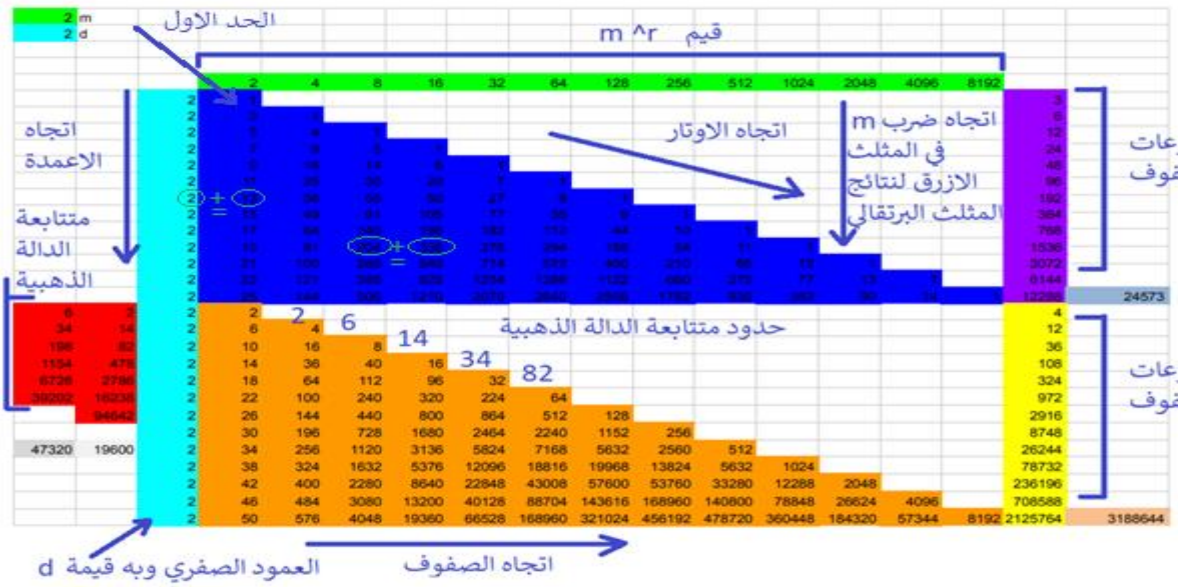
فنضرب حدود العمود رقم (r) في المثلث الأزرق في ($m^r$) لينتج لنا حدود العمود رقم (r) في المثلث البرتقالي.

قيم ($m^r$) تظهر على الصف الأخضر كل قيمة فوق عمودها.

### 6.4 بقية الأعمدة:

العمود البنفسجي والعمود الأصفر هما ناتج جمع صفوف المثلث الأزرق والمثلث البرتقالي على الترتيب بالإضافة لجمع قيمة الحد الصفري المقابلة.

العمودان باللون الأحمر هما الحدود الفردية على اليمين والحدود الزوجية على اليسار من المتتابعات الناتجة عن الدالة الذهبية ويتم تكوين حدود تلك المتتابعات بجمع حدود المثلث في اتجاه يميل عن الاتجاه الأفقي إلى أسفل.




**شكل 1 الشكل العام لتوضيح مكونات المثلث**

### 6.5 الحصول على نتيجتين منفصلتين:

كانت هناك بعض التساؤلات حول مجموع المتتالية الحسابية ومجموع المجموع ومجموع مجموع المجموع ووجدت أن ذلك يتم عبر دالة توافقية كالاتي:

$$\mathbf{1+2+3+\cdots.+n=\frac{n\,(n+1)}{2}}$$

$$\mathbf{1+3+6+10+\cdots.+\frac{n\,(n+1)}{2}=\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6}}$$

$$\mathbf{1+4+10+20+\cdots+\cdots\ldots\ldots.+\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6}=\frac{n\,(n+1)\,(n+2)(n+3)}{24}}$$

ثم اكتشفت فيما بعد أن كل هذه المتتاليات موجودة بالفعل في مثلث باسكال.

ومن ناحية أخرى وعندما علمت بالنسبة الذهبية وخواصها وعلاقتها بمتتابعة فيبوناتشي أيقنت أنه لابد من وجود نسب أخرى مشابهة للنسبة الذهبية ومتتابعات شبيهة بمتتابعة فيبوناتشي ناتجة عن تلك النسب الجديدة، وبعد قليل من الدراسة تحصلت على دالة أسميتها ب (الدالة الذهبية) لأنها تحمل في مجملها خواص النسبة الذهبية وتعتبر تعميما لها.

هذه الدالة الجديدة تولد عدد لا نهائي من النسب نأخذ منها على سبيل المثال:

1. $\mathbf{1.61803398875}$ وهذه هي النسبة الذهبية [Grigoryan & Grigoryan, 2023] وعددها الصحيح 1
2. $\mathbf{2.41421356237}$ وهذه نسبة شبيهة بالنسبة الذهبية وعددها الصحيح 2
3. $\mathbf{3.30277563773}$ وهذه نسبة شبيهة بالنسبة الذهبية وعددها الصحيح 3
4. $\mathbf{4.23606679775}$ وهذه نسبة شبيهة بالنسبة الذهبية وعددها الصحيح 4

وأي نسبة من هذه النسب تولد متتابعة شبيهة بمتتابعة فيبوناتشي

فمثلا النسبة التي بها العدد الصحيح يساوي 2 تكون أعداد بيل (Pell numbers) [Adedji et al., 2022]:

1 2 5 12 29 70 ....

الفرق بين طريقة تكوين متتالية فيبوناتشي وبين طريقة تكوين أعداد بيل أعلاه هو أننا نضرب العدد في 2 ثم نضيف له العدد السابق لينتج لنا العدد اللاحق

وعندما نستخدم النسبة التي عددها الصحيح هو 3 سنضرب في 3 بدلا عن 2[Kanado, 2022].

ثم لما علمت بالعلاقة بين مثلث باسكال وبين متتابعة فيبوناتشي وبين عوامل نظرية ذات الحدين تساءلت عما إذا كان بإمكاني إيجاد علاقة بين النسب الجديدة والمتتابعات الجديدة وبين هذا المثلث ونظرية ذات الحدين ومن هنا جاءت فكرة البحث عن علاقات ومعادلات رياضية ودوال حاكمة تحكم جميع هذه الأنماط الرياضية.

## 7. النتائج:

هذه المثلثات – ودعنا نخص المثلث البرتقالي – تحكمها خمس معادلات، ثلاثة منها تحسب قيمة الحد أيًا كان موقعه؛ الأولى على حسب العمود والثانية على حسب الوتر والثالثة على حسب الصف. أما الرابعة فهي تحسب القيم الناتجة عن حاصل جمع حدود الصف، والخامسة تحسب قيم حدود المتتابعات الناتجة عن الدالة الذهبية.

لإستنتاج المعادلة العمودية والمعادلة الوترية يجب أن نتذكر الحدود النونية للمتتابعات التالية:

$$1\ 2\ 3\ 4\ldots\ldots\ldots\ldots n$$

$$1\ 3\ 6\ 10\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{2}\,n\,(n+1)$$

$$1\ 4\ 10\ 20\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(n+2)$$

$$1\ 5\ 15\ 35\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{24}\,n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)$$

وبصورة عامة يمكن كتابة الحدود النونية كالأتي:

$$F_r(n) = C_r^{n+r-1}$$

حيث r يمثل ترتيب المتتابعة

ولاستنتاج المعادلات نبدأ كتابة المثلث الأزرق بدلالة الحد الصفري d والحد الأول a

**جدول (1) يمثل المثلث الأزرق**

| d | a | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| d | d+a | a | | | | |
| d | 2d+a | d+2a | a | | | |
| d | 3d+a | 3d+3a | d+3a | a | | |
| d | 4d+a | 6d+4a | 4d+6a | d+4a | a | |
| d | 5d+a | 10d+5a | 10d+10a | 5d+10a | d+5a | a |

وبملاحظة معادلات الحد الصفري d والحد الأول a يمكن كتابة المعادلة العمودية كالأتي:

### 7.1 المعادلة العمودية:

$$g\,(d,a,r,n) = dC_r^{n+r-2} + aC_{r-1}^{\ n+r-2}$$

حيث:

قيمة الحد = g

الحد الصفري =d

الحد الأول = a

رقم العمود = r

رقم الحد في العمود=n

التوافيق = C

وفي الاتجاه الوتري سيصبح الحد الصفري هوa والحد الأول هو d وفق ذلك يمكن كتابة المعادلة الوترية كالأتي:

### 7.2 المعادلة الوترية:

$$L\,(d,a,r,n) = aC_r^{n+r-2} + dC_{r-1}^{\ n+r-2}$$

حيث:

قيمة الحد =L

الحد الصفري = d

الحد الأول = a

رقم العمود = r

رقم الحد في العمود=n

التوافيق = C

وبما أن حدود أي عمود تمثل مجموع حدود العمود السابق له فيمكننا كتابة الآتي:

$$\sum_{n=a}^{m}[dc_r^{n+r-2} + ac_{r-1}^{n+r-2}] = dc_{r+1}^{m+r-1} + ac_r^{m+r-1}$$

وبعد ملاحظة عوامل a وdفي اتجاه الصف يمكن كتابة المعادلة الصفية كالآتي:

### 7.3 المعادلة الصفية:

$$p\,(d,a,r,n) = dC_{r-1}^{\ n-1} + aC_{r-2}^{\ n-1}$$

حيث:

قيمة الحد = p

الحد الصفري = d

الحد الأول = a

رقم الحد في الصف= r

رقم الصف = n

وتعميم المعادلات الثلاثة السابقة لتشمل المثلث البرتقالي ما علينا سوى أن نضرب المعادلة g في $m^r$ والمعادلة L في $m^{n-1}$ والمعادلة p في $m^{r-1}$.

والآن ولاستنتاج معادلة مجموع الصفوف ومعادلة متتابعات الدالة الذهبية نكون جدول جديد وذلك بضرب الجدول السابق في $m^r$ ونأخذ مرة m=2 ومرة m=3 وندرس سلوك المثلث.

أولا: عند m=2

مجموع الصف الأول d+2a

مجموع الصف الثاني 3d+6a= 3(d+2a)

مجموع الصف الثالث 9d+18a= 9(d+2a)

مجموع الصف الرابع 27d+54a= 27(d+2a)

ثانيا: عند m=3

مجموع الصف الأول d+3a

مجموع الصف الثاني 4d+12a= 4(d+3a)

مجموع الصف الثالث 16d+48a= 16(d+3a)

ومن ذلك نستنتج أن معادلة مجموع الصفوف

### 7.4 معادلة مجموع الصفوف:

$$h\,(d,a,m,n) = (d+am)\,(1+m)^{n-1}$$

حيث:

قيمة مجموع الصف = h

الحد الصفري = d

الحد الأول = a

العدد الثابت = m

رقم الصف = n

والآن ولاستنتاج معادلة متتابعات الدالة الذهبية نستنتج الدالة الذهبية أولا

من المعلوم أننا يمكننا استنتاج النسبة الذهبية من العلاقة التالية

$$1+\frac{1}{a}= a$$

أو بعبارة أخرى نحل المعادلة [Hauser, 2015]

$$a^2 - a - 1 = 0$$

لتعميم فكرة النسبة الذهبية نستبدل العدد 1 بالرمز m فتصبح العلاقة

$$m+\frac{1}{a}= a$$

نضرب المعادلة في a ونجعلها صفرية

$$a^2 - ma - 1 = 0$$

نحل هذه المعادلة باستخدام القانون العام

$$a= \frac{-(-m)\pm\sqrt{(-m)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$a= \frac{m\pm\sqrt{m^2+4}}{2}$$

حيث

العدد الثابت = m

عند m=1 نحصل على النسبة الذهبية

عند m=1

$$a=\frac{1\pm\sqrt{1^2+4}}{2}=a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

m=2

$$a=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=a=1\pm\sqrt{2}$$

m=3

$$a=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$$

وهكذا إلى ما لانهاية

تعميم الحد النوني لمتتابعة فيبوناتشي:

من المعلوم أن الحد النوني لمتتابعة فيبوناتشي يكتب على النحو التالي [Schütz & Kelly, 2023]:

$$F_n=\frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$$

ويمكن تعميم ذلك كالآتي:

$$F(n,m)=\frac{(\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2})^n-(\frac{m-\sqrt{m^2+4}}{2})^n}{\sqrt{m^2+4}}$$

وهذا بدوره يعطينا متتابعات جيدة لكل قيمة m

فعند m=1 تنتج متتابعة فيبوناتشي

1,1,2,3,5,8,.....

وعند m=2 تنتج لدينا أعداد بيل

1,2,5,12,29,.....

وعند m=3 تنتج عندنا المتتالية التالية

1,3,10,33,109,.....

وبهذه الطريقة يمكن تكوين عدد لانهائي من المتتاليات على حسب قيمة (m)

والآن ولكي نستنتج معادلة متتابعات الدالة الذهبية ندرس سلوك المتتابعات في الجدول (1) والجدول (2) والجدول (3)

**جدول 2 يمثل المثلث البرتقالي عند (m=2)**

| $2^0$<br>1 | $2^1$<br>2 | $2^2$<br>4 | $2^3$<br>8 | $2^4$<br>16 | $2^5$<br>32 |
|---|---|---|---|---|---|
| d | 2a | | | | |
| d | 2d+2a | 4a | | | |
| d | 4d+2a | 4d+8a | 8a | | |
| d | 6d+2a | 12d+12a | 8d+24a | 16a | |
| d | 8d+2a | 24d+16a | 32d+48a | 16d+64a | 32a |

**جدول 3 يمثل المثلث البرتقالي عند (m=3)**

| $3^0$<br>1 | $3^1$<br>3 | $3^2$<br>9 | $3^3$<br>27 | $3^4$<br>81 |
|---|---|---|---|---|
| d | 3a | | | |
| d | 3d+3a | 9a | | |
| d | 6d+3a | 9d+18a | 27a | |
| d | 12d+3a | 27d+27a | 27d+81a | 81a |

أولا: عند m=1

الحد الأولa

الحد الثاني a+d

الحد الثالث 2a+d

الحد الرابع3a+2d

الحد الخامس 5a+3d

الحد السادس8a+5d

ونلاحظ من ذلك أن معادلات a وd هي عبارة عن حدود متتابعة فيبوناتشي مع اختلاف في الترتيب

ثانيا: عند m=2

الحد الأول 1(2a)

الحد الثاني 2(2a)+d

الحد الثالث 5(2a)+2d

الحد الرابع 12(2a)+5d

الحد الخامس 29(2a)+12d

وأيضا هنا مع ملاحظة المعادلات نرى وجود حدود المتتابعة الناتجة عن m=2

ثالثا: عند m=3

الحد الأول 1(3a)

الحد الثاني 3(3a)+d

الحد الثالث 10(3a)+3d

الحد الرابع 33(3a)+10d

ومن ذلك نستنتج معادلة متتابعات الدالة الذهبية

**7.5 معادلة متتابعات الدالة الذهبية:**

$$F(a,d,m,n)=\frac{ma\left(\left(\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}\right)^n-\left(\frac{m-\sqrt{m^2+4}}{2}\right)^n\right)+d\left(\left(\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{m-\sqrt{m^2+4}}{2}\right)^{n-1}\right)}{\sqrt{m^2+4}}$$

حيث:

قيمة الحد = f

الحد الأول =a

الحد الصفري =d

العدد الثابت = m

ترتيب الحد = n

## 8. المناقشة:

لكي نكون أي مثلث يتحتم علينا معرفة ثلاث قيم:

قيمة الحد الصفري (d) وقيمة الحد الأول (a) وقيمة العدد الثابت (m) فمثلا عند(d=0) (m=1) (a=1) ينتج لنا مثلث باسكال ومتتابعة فيبوناتشي وعند (d=2) (a=1) (m=1) ينتج لنا مثلث جديد ومتتابعة لوكاس [Blair et al., 2022].

إن فكرة هذا البحث نتجت عن توقع أو تنبؤ أو حدس والتي ظهر أنها صحيحة بنسبة 100% نبينها في الجدول التالي:

**جدول (4) العلاقة بين عدد الحدود والعدد الصحيح في نسب الدالة الذهبية**

| معادلة النسبة | النسبة المقابلة | مجموع المعاملات بعد المفكوك | |
|---|---|---|---|
| $1+{}^{1}/_{x}=x$ | 1.618 | $2^n$ | $(a+b)^n$ |
| $2+{}^{1}/_{x}=x$ | 2.414 | $3^n$ | $(a+b+c)^n$ |
| $3+{}^{1}/_{x}=x$ | 3.303 | $4^n$ | $(a+b+c+d)^n$ |

| معادلة النسبة | النسبة المقابلة | مجموع المعاملات بعد المفكوك | |
|---|---|---|---|
| $4+{}^{1}/_{x}=x$ | 4.236 | $5^n$ | $(a+b+c+d+e)^n$ |
| $m+{}^{1}/_{x}=x$ | ------- | $(1+m)^n$ | عدد الحدود =m+1 |

واضح من الجدول أن النسبة المقابلة لذات الحدين هي النسبة الذهبية التي تنتج عنها متتابعة فيبوناتشي والنسبة المقابلة لذات الثلاثة حدود هي نسبة جديدة تنتج عنها متتابعة جديدة وهكذا إلى ما لانهاية.

وكل هذه العلاقات يجمعها العدد الثابت (m) الذي يظهر في معادلة مجموع الصفوف ومعادلة متتابعات الدالة الذهبية.

وهذا يدل على النظام الرياضي القوي المتين البديع حيث أن جميع هذه العلاقات محكومة بمعادلات غاية في الروعة والدقة والإحكام. هذه المعادلات تمثل تعميم للعلاقة بين مثلث باسكال ومعادلات مفكوك نظرية ذات الحدين ومتتابعة فيبوناتشي.

### 8.1 حدسية الأعداد الأولية:

من المعلوم في أسرار وأنماط مثلث باسكال أن هناك نمطا يخص الأعداد الأولية وهو أنه في العمود الذي يحتوي على الأعداد الطبيعية إذا كان العدد الطبيعي هذا عددا أوليا فإنه يقسم جميع الحدود التي معه في نفس الصف باستثناء الواحد الذي على يمين الصف والواحد الذي على يساره [Meisner, 2018] وعند التأمل في هذا النمط نجد أنه يمثل برهنة فيرما الصغرى [Effinger & Mullen, 2021] حيث أن مجموع الصفوف يمثل قوى العدد (2) وعندما نطرح منه (2)

$$2^n - 2 = 2[2^{n-1} - 1]$$

فإذا كان (n) عددا أوليا فإن المقدار أعلاه يقبل القسمة عليه.

وعند التأمل والملاحظة في المثلثات نجد أن هذا النمط يعتمد اعتمادا كبيرا على قيمة الحد الصفري (d) بحيث إذا بدأنا من العدد الأولي ثم تحركنا رأسيا إلى أسفل بمقدار (d-1) ثم تحركنا أفقيا إلى اليمين بمقدار (d) فإن هذا الحد الجديد يقبل القسمة على العدد الأولي الذي بدأنا الحركة منه، وإذا كررنا العملية وتحركنا من الحد الجديد رأسيا إلى أسفل بمقدار (d-1) ثم أفقيا إلى اليمين بمقدار (d) فإن الحد الجديد كذلك يقبل القسمة على العدد الأولي، ونكرر ذلك حتى نصل إلى الوتر الصفري.

هذا يقودنا إلى حدسية تشبه في مضمونها مبرهنه فيرما الصغرى، فبما أن جميع الحدود – باستثناء الواحد الواقع على الوتر الصفري – تقبل القسمة على العدد الأولي، فإذا تمكنا من إيجاد العلاقة العامة التي تربط مجموع تلك الحدود فسنحصل على حدسية تشبه مبرهنة فيرما الصغرى، وهذا ما تم بالفعل في هذه الحدسية والتي تعتبر تعميما لمبرهنة فيرما الصغرى.

#### 8.1.1 تعميم المعادلة الذهبية إلى المعادلة الماسية:

نبدأ بمعادلة النسبة الذهبية

$$1+\frac{1}{a}=a \rightarrow a^2-a-1=0$$

حيث تم تعميمها بإضافة العدد الثابت m

$$m+\frac{1}{a}=a \rightarrow a^2-ma-1=0$$

ولتعميمها من المعادلة الذهبية إلى المعادلة الماسية نقوم بإضافة العدد (n) حيث (n) عدد طبيعي

$$m+\frac{1}{a^{n-1}}=a \rightarrow a^n-ma^{n-1}-1=0$$

تحدد قيمة (n) على حسب ميل خطوط جمع حدود المثلث

فإذا كان جمع حدود المثلث أفقيا تماما فإن (n=1) وإذا مالت الخطوط في اتجاه متتابعة فيبوناتشي فإن (n=2)

فإذا مالت أكثر فإن (n=3) وهكذا...

قيمة (n) تحدد لنا النسب المستخدمة في الحد النوني لحساب المتتابعات الناتجة عن عملية جمع حدود المثلثات في اتجاه الميل المحدد.

والآن لنعود إلى المعادلة الماسية مع اعتبار (m=1) وتغيير (a) بالرمز (R) اختصار (Ratio)

$$R^d - R^{d-1} - 1 = 0$$

حيث d هو الحد الصفري

من المعلوم أنه إذا كان (d) عدد طبيعي فإن عدد حلول (R) يساوي (d)

والآن إلى صياغة الحدسية رياضيا:

### 8.1.2 الصيغة الرياضية للحدسية:

$$\left[\sum_{i=1}^{d} R_i^p\right] = 1(\text{mod}p)\ \forall d \in N$$

حيث (p) = عدد أولي و(R)= حلول المعادلة الماسية

باستثناء 1=(d) فإن

$$R^P{}_1 = 2(\text{mod}p)$$

وهذه النقطة تعتبر من الأسرار التي تتاج لمزيد بحث.

وفي الجدول التالي بيان للمتتابعات الأولى على حسب قيمة (d) والنسب الناتجة عن حلول المعادلة الماسية مقربة إلى ثلاث منازل عشرية

**جدول 5: المتتابعات الأولى من متتابعات حدسية الاعداد الأولية**

| الحد الصفري | المتتابعة الناتجة | | | | | | | | | | حلول R مقربة إلى ثلاث منازل عشرية |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 | $R_1$=2 |
| 2 | 1 | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 | 29 | 47 | 76 | 123 | $R_1$=1.618<br>$R_2$=-0.618 |
| 3 | 1 | 1 | 4 | 5 | 6 | 10 | 15 | 21 | 31 | 46 | $R_1$=1.466<br>$R_2$=-0.233-0.793i<br>$R_3$=-0.233+0.793i |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 5 | 6 | 7 | 8 | 13 | 19 | 26 | $R_1$=1.380<br>$R_2$=-0.819<br>$R_3$=0.219+0.914i<br>$R_4$=0.219-0.914i |

من الجدول نلاحظ في تكوين المتتابعات أن الحد اللاحق يساوي الحد الحالي زائد الحد الذي يسبقه في الترتيب بمقدار (d-1) ومن المدهش أن نرى ظهور الأعداد العقدية في دراسة تخص الأعداد الأولية.

وأعتقد أن متتابعة لوكاس (d=2) من أفضل المتتابعات التي تصلح لدراسة الأعداد الأولية.

**جدول6: المتتابعة الأولي في جدول 5 عند d=1**

| الحد الصفري d | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | 4 | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | 8 | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | 16 | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | 32 | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | 64 |

**جدول7: المتتابعة الثانية في جدول 5 عند d=2**

| الحد الصفري d | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 3 | 1 | 3 | | | | |
| 2 | 5 | 4 | 1 | 4 | | | |
| 2 | 7 | 9 | 5 | 1 | 7 | | |
| 2 | 9 | 16 | 14 | 6 | 1 | 11 | |
| 2 | 11 | 25 | 30 | 20 | 7 | 1 | 18 |

جدول8: المتتابعة الثالثة في جدول 5 عند d=3

| الحد الصفري d | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 1 | | | | | |
| 3 | 4 | 1 | 1 | | | | |
| 3 | 7 | 5 | 1 | 4 | | | |
| 3 | 10 | 12 | 6 | 1 | 5 | | |
| 3 | 13 | 22 | 18 | 7 | 1 | 6 | |
| 3 | 16 | 35 | 40 | 25 | 8 | 1 | 10 |

جدول9: المتتابعة الرابعة في جدول 5 عند d=4

| الحد الصفري d | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 1 | | | | | |
| 4 | 5 | 1 | 1 | | | | |
| 4 | 9 | 6 | 1 | 1 | | | |
| 4 | 13 | 15 | 7 | 1 | 5 | | |
| 4 | 17 | 28 | 22 | 8 | 1 | 6 | |
| 4 | 21 | 45 | 50 | 30 | 9 | 1 | 7 |

## 9. الخلاصة:

لقد تم في هذا البحث تحويل مثلث باسكال وغيره من المثلثات الشبيهة إلى علاقات ومعادلات، هذه المعادلات ربما تساعد الباحثين من اكتشافات جديدة في عالم الأعداد.

لقد تم تعريف الحد الصفري (d) والحد الأول (a) اللذان يكونان المثلثات ثم العدد الثابت (m) الذي ينتج مثلثات لانهائية من المثلث الواحد ل (d) و(a).

لقد تم استنتاج معادلات تحسب لنا قيم حدود المثلثات (المعادلة العمودية – المعادلة الوترية – المعادلة الصفية) ومعادلات تحسب لنا مجموع حدود المثلثات (معادلة مجموع الصفوف – معادلة متتابعات الدالة الذهبية).

لقد تم تعميم معادلة النسبة الذهبية إلى معادلة الدالة الذهبية إلى المعادلة الماسية، وهذه الأخيرة تعتبر مجرد حدسية إلى الآن.

## 10. التوصيات:

1. دراسة الدالة الذهبية والمعادلة الماسية بعمق واكتشاف أسرارهما.

2. محاولة دراسة وتعميم كل ما له علاقة بالنسبة الذهبية كالمستطيل الذهبي والمثلث الذهبي.
3. المعادلات المذكورة في هذا البحث تصلح في حال كانت قيم المتغيرات أعدادا طبيعية، ولكن من المستحسن دراسة هذه المعادلات في حال كانت المتغيرات أعدادا نسبية أو حقيقية أو حتى عقدية أو ربما دوال.

## قائمة المراجع:

## References:


[1] Adedji, K. N., Filipin, A., Rihane, S. E., & Togbe, A. (2022). Pell or Pell-Lucas numbers as concatenations of two repdigits in base $ b$. *arXiv preprint arXiv:2210.09699*.

[2] Blair, M., Flórez, R., & Mukherjee, A. (2022). Honeycombs in the Pascal triangle and beyond. *arXiv preprint arXiv:2203.13205*.

[3] Bondarenko, B. A. (1993). *Generalized Pascal triangles and pyramids: their fractals, graphs, and applications*. Santa Clara, CA: Fibonacci Association.

[4] Cox, W. R. (2023). *Arithmetic Triangles and Pascal-Type Recurrence Relations* (Doctoral dissertation, Middle Tennessee State University).

[5] Effinger, G., & Mullen, G. L. (2021). *Elementary number theory*. CRC Press.

[6] Freitas, G., Kreutz, A., Lelis, J., & Silva, E. (2022). On the Sequences of $(q, k) $-Generalized Fibonacci Numbers. *arXiv preprint arXiv:2211.08941*.

[7] Grigoryan, A. M., & Grigoryan, M. M. (2023). Notes on the Golden Ratio: The Golden Rule of Vector Similarities in Space. *arXiv preprint arXiv:2302.02494*.

[8] Islam, M. S., Islam, M. R., Hossan, M. S., & Kibria, M. H. (2022). Generating binomial coefficients in a row of Pascal's triangle from extensions of powers of eleven. *Heliyon*, *8*(11).

[9] Kanado, Y. (2022). The relation between a generalized Fibonacci sequence and the length of Cunningham chains. *arXiv preprint arXiv:2205.07650*.

[10] Meisner, G. B. (2018). *The golden ratio: The divine beauty of mathematics*. Race Point Publishing.

[11] O'Shea, O. (2016). *The call of the primes: surprising patterns, peculiar puzzles, and other marvels of mathematics*. Prometheus Books.

[12] Pellis, S. (2022). Unification Archimedes constant π, golden ratio φ, Euler's number e and imaginary number i. *Authorea Preprints*.

[13] Schütz, C., & Kelly, K. (2023). On negaFibonacci-esque Sequences and Their Relation to the Golden Ratio. *arXiv e-prints*, arXiv-2308.