Arab Journal of Sciences and Research Publishing
Volume (8), Issue (2): 30 Jun 2022
P: 120 - 129

ISSN: 2518-5780

المجلة العربية للعلوم ونشـر الأبحـاث
المجلد (8)، العدد (2): 30 يونيو 2022 م
ص: 120 - 129

A Study about One Representation of the Hamiltonian Complex finite dimensional Lie Algebra

Nader M.Taffach

Faculty of Science || Idlib University || Syria

Abstract: The importance of group theory and its classifications lies in many engineering, physical and chemical fields, and in particular in concepts related to the concept of symmetry. In this article, we study an issue related to the representation of Lie algebra that is closely related to the topic of Lie groups and their representations. The construction of a complex Lie algebra generates a correspondence between complete connect Lie groups with a trivial center and semi-simple Lie complex algebras. In this article, we found a harmonic representation of the finite-dimension complex Lie algebra in terms of its base elements and an adjoint matrix for an arbitrary element of it. This article consists of an introduction and two main sections. In the first section, the basic definitions and concepts that will be relied upon were mentioned in the second important section of the article, in which a basic theorem with its proof will be presented, through this theorem any complex Lie algebra of a finite dimension can be represented in terms of its base elements and an adjoint matrix for an element of it.

Keywords: algebra over field, Lie algebra, complex Lie algebra, adjoint matrix, representation of Lie algebra.

دراسة حول أحد التمثيلات التوافقية لجبر لي العقدي منته البعد

نادر محمود طفاش

كلية العلوم || جامعة إدلب || سورية

المستخلص: تكمن أهمية نظرية الزمر وتصنيفاتها في العديد من المجالات الهندسية والفيزيائية والكيميائية، وبشكل خاص في المفاهيم التي ترتبط بمفهوم التناظر. في هذه المقالة ندرس مسألة مرتبطة بتمثيل جبر لي ذو الصلة الوثيقة بموضوع زمر لي وتمثيلاتها. حيث بناء جبر لي العقدي يولد تقابلاً ما بين زمر لي التامة المترابطة ذات المركز التافه وبين جبور لي العقدية نصف البسيطة. قمنا بإيجاد تمثيل توافقي لجبر لي العقدي منته البعد بدلالة عناصر قاعدة له ومصفوفة مرافقة لعنصر اختياري منه. تتألف هذه المقالة من مقدمة وقسمين أساسيين. ففي القسم الأول تم ذكر التعاريف والمفاهيم الأساسية التي سيتم الاعتماد عليها بشكل كبير في القسم الثاني الهام في المقالة، والذي سيتم فيه عرض وإثبات مبرهنة أساسية يمكن من خلالها تمثيل أي جبر لي عقدي منته البعد بدلالة عناصر قاعدته ومصفوفة مرافقة لعنصر ما منه.

الكلمات المفتاحية: الجبر على حقل ما، جبر لي، جبر لي العقدي، المصفوفة المرافقة لعنصر ما، تمثيل جبر لي.

مقدمة.

تنشأ الزمر المنتهية، في أغلب الأحيان، عند مصادفة بنى رياضية أو أشياء فيزيائية (مادية) تتمتع بخاصية التناظر، وذلك عندما يتم إجراء عدد محدود من التحويلات على هذه البنى أو الأشياء والتي تحافظ على بنيتها. عمل الباحثون خلال القرن العشرين بتعمق كبير في بعض الجوانب النظرية للزمر المنتهية (وغير المنتهية) بشكل مركز حيث تم إيلاء هذه الدراسة اهتمام كبير. فكان مفهوم التصنيف لهذه الزمر والبنى الجبرية أحد المجالات الرئيسية لهذه

الدراسة. ففي بداية الثمانينيات، بلغ تطور نظرية الزمر ذروته في تصنيف الزمر البسيطة المنتهية، وكان هذا التطور مثير للإعجاب إذ ظهرت فيه قوة الأساليب التي تم اتباعها والنتائج التي تم تحقيقها والوصول إليها [6]. فقد تم في عام 2004 الانتهاء من تصنيف الزمر البسيطة المنتهية ونتيجة لذلك، تم تحقيق التصنيف الكامل لهذه الزمر، مما يعني أن كل تلك الزمر البسيطة التي يمكن من خلالها بناء جميع الزمر المنتهية أصبحت معروفة [1].

خلال مسيرة دراسة نظرية الزمر وتصنيفاتها بكل تفرعاتها ظهرت عدة مفاهيم أخرى موازية ذات ارتباط وثيق بها، مثل مفهوم زمر وجبور لي، والتي تُنسَب لعالم الرياضيات النرويجي سوفوس لي Sophus Lie [2]. والذي كان أول من استخدم التناظرات المستمرة والمتقطعة في دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية. ولكي يستطيع تطبيق زمرة التحويلات المستمرة (والتي تدعى زمرة لي في وقتنا الحاضر)، قام بجعل هذه التحويلات خطية ودراسة المولدات منتهية البعد. يمكن التعبير عن خصائص الترابط لزمرة لي بواسطة مبدلات المولدات. يسمى جبر المبدلات للمولدات في وقتنا الحالي جبر لي. تظهر زمر لي في أماكن عديدة في الفيزياء الحديثة. فعلى سبيل المثال، فإن زمرة المقاييس الداخلية للنموذج القياسي $(U(1)SU(3)\times SU(2)\times U)$ هي ناتج جداء عدد من زمر لي. تظهر زمر المقاييس الأكبر في سياق نظريات القياس المعممة (ذات الأبعاد الأعلى)، والتي يأمل منها الربط بين النموذج القياسي والتجاذب التي لم يتم تضمينها فيه بعد. في ميكانيكا الكم، يتم الاهتمام بزمر مؤثرات الوحدة التي تؤثر على الفضاء الشعاعي للحالات الكمية. نظراً لعدم تبادلية المؤثرات، فإن هذه الزمر هي زمر لي. ومنه يتم التركيز على الزمرالتي يتم إنشاؤها بشكل مستمر، أي تلك التي يمكن إنشاء عناصرها من خلال تحويلات متكررة لامتناهية في الصغر. لذلك يعتبر مفهوم جبور لي من المفاهيم الأساسية في الجبر ذو الصلة الوثيقة بنظرية الزمر وتمثيلاتها. فكل زمرة لي تؤدي إلى جبر لي، والذي سيكون عبارة عن الفضاء المماس للزمرة عند العنصر الحيادي لها [5]. وبالعكس لكل جبر لي (حقيقي أو عقدي) منته البعد يوجد زمرة لي مترابطة مقابلة له [7]. يسمح هذا التقابل بدراسة بنية وتصنيف زمر لي من خلال دراسة جبور لي. انطلاقاً من هذا الارتباط الوثيق بين مفهومي زمر وجبور لي، قمنا في هذه المقالة بدراسة أحد التمثيلات التوافقية لجبر لي العقدي منته البعد بدلالة عناصر قاعدته ومصفوفة مرافقة لأحد عناصره. ففي هذه المقالة، بيَّنا أن كل جبر لي عقدي منته البعد يمكن تمثيله بدلالة عناصر قاعدته ومصفوفة مرافقة لأحد عناصره (انظر المبرهنة 1، في الأسفل).

تتألف هذه المقالة من مقدمة وقسمين أساسيين. ففي القسم الأول تم ذكر التعاريف والمفاهيم الأساسية التي سيتم الاعتماد عليها بشكل كبير في القسم الثاني الهام في المقالة، والذي سيتم فيه عرض وإثبات مبرهنة أساسية يمكن من خلالها تمثيل أي جبر لي عقدي منته البعد بدلالة عناصر قاعدته ومصفوفة مرافقة لعنصر ما منه.

الهدف من المقالة

تهدف المقالة إلى دراسة تمثيل جبر لي العقدي منته البعد بدلالة عناصر قاعدة له ومصفوفة مرافقة لعنصر اختياري من عناصره.

أهمية المقالة

إن لنظرية الزمر وتمثيلاتها بالإضافة إلى تصنيفاتها أهمية كبيرة في العديد من المجالات الهندسية والفيزيائية والكيميائية، وبشكل خاص بما هو مرتبط بمفهوم التناظر. لذلك تكمن أهمية المقالة في النتائج التي تم الحصول عليها والتي تخص تمثيل جبر لي العقدي منته البعد بدلالة عناصر قاعدة له والمصفوفة المرافقة لعنصر اختياري من عناصره. ومن المعلوم الارتباط الوثيق بين مفهومي جبر لي ومفهوم الزمر وتمثيلاتها، إذ يسمح الارتباط الوثيق بين

جبور لي وزمر لي بدراسة بنية وتصنيف زمر لي من خلال دراسة بنية جبور لي. مما يعطي أهمية للمقالة للباحثين في نظرية الزمر (وبشكل خاص زمر لي) وتصنيفاتها.

منهج ومشكلة الدراسة:

الدراسة التي تم تناولها في البحث هي دراسة نظرية، ويعود هذا الأمر إلى طبيعة المجال الذي يندرج فيه البحث المقدَّم، وهو مجال تمثيل الزمر والجُبور والذي يعتبر من المجالات الهامة في الجبر ودراسة البنى الجبرية. ونظراً للارتباط الوثيق بين مفهومي جبر لي وموضوع الزمر وتمثيلاتها، تم في هذا البحث دراسة تمثيل توافقي لجبر لي العقدي منته البعد بدلالة عناصر قاعدة له ومصفوفة مرافقة لعنصر اختياري منه. الأمر الذي يسهل دراسة العديد من الخواص والعلاقات التي تخص جبور لي وتمثيلاتها.

مصطلحات المقالة ومفاهيم أساسية

فيما يأتي سنعرض بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية والتي سيتم العودة لها في أماكن عدة في المقالة. يمكن العودة للمراجع الآتية للاستزادة والاطلاع على المفاهيم المذكورة [3],[4],[6],[8],[9].

تعريف 1:

الجبر على حقل K هو فضاء شعاعي A على الحقل K مزود بعملية جداء ثنائي الخطية.

$$\cdot : A \times A \to A$$
$$(x, y) \to [x, y]$$

نقول عن جبر أنه تجميعي إذا كان

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall\, x, y, z \in A.$$

أمثلة:

1. نرمز بـ $gl(V)$ مجموعة التطبيقات الخطية من V إلى V، حيث V فضاء شعاعي على الحقل K.
   إذا زود $gl(V)$ بعملية تركيب التطبيقات فإن $gl(V)$ جبر تجميعي على الحقل K.
2. نرمز بـ $gl(n, K)$ للفضاء الشعاعي لكل المصفوفات من المرتبة n على الحقل K.
   إذا زودت $gl(n, K)$ بعملية ضرب المصفوفات الاعتيادية فإن $gl(n, K)$ جبر تجميعي على الحقل K.

ملاحظة: الفضاءات الشعاعية لتحويلات خطية لا تدرس فقط على أنها جبور تجميعية ولكن غالباً تدرس مع مؤثرات ثنائية الخطية التي هي بشكل عام غير تبديلية وغير تجميعية.

تعريف 2:

جبر لي على حقل K هو فضاء شعاعي L على حقل K مزود بمؤثر ثنائي الخطية يدعى قوس لي:

$$[\cdot\cdot]\,; L \times L \longrightarrow L$$
$$(x, y) \longrightarrow [x, y]$$

الذي يحقق الخواص التالية:

1. $[x, x] = 0$ من أجل كل $x \in L$.
2. $\forall\, x, y, z \in L$ فإن $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$

تعريف 3:

الفضاء الجزئي U لجبر لي L، يدعى جبر لي الجزئي من Lإذا تحقق: من أجل كل $x, y \in U$ فإن $[x, y] \in U$.

ملاحظات:

1. الخاصية الثانية لقوس لي تسمى متطابقة جاكوبي.
2. من خاصية ثنائي الخطية لقوس لي ينتج ما يلي:

$$[\alpha x, y] = [x, \alpha y] = \alpha[x, y]$$

إن $[x, y] = -[y, x]$. وذلك لأن:

$$[x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = 0$$

ومنه:

$$[x, y] + [y, x] = 0$$

وبالتالي:

$$[x, y] = -[y, x], \forall\, x, y \ \in L$$

مثال 1:

كل فضاء شعاعي V على الحقل Kيمكن اعتباره جبر لي مزود بقوس لي المعرف بالشكل التالي:

$$[x, y] = 0, \forall\, x, y \ \in V$$

يسمى جبر لي المزود بقوس لي التافه بجبر لي التبديلي.

مثال 2:

إذا كان L جبر لي على حقل K قاعدته $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. عندئذ يكون قوس لي على L معرف بشكل عام بالشكل:

$$[b_i, b_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k b_k \ ; \ a_{ij}^k \in K$$

حيث اختيار المعاملات a_{ij}^k متعلق باختيار القاعدة في الجبر L. وبالعكس يمكن من خلال تثبيت المعاملات a_{ij}^k تعريف جبر لي.

إن الشرطان التاليان متكافئان

1. $a_{ii}^k = 0 = a_{ij}^k + a_{ji}^k$.
2. $\sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k a_{kl}^m + a_{jl}^k a_{ki}^m + a_{li}^k a_{kj}^m = 0$

مثال 3:

ليكن الفضاء الشعاعي $gl(V)$ لكل التطبيقات الخطية للفضاء Vفي نفسه، يعرف قوس لي من خلال

$$[x, y] = x \circ y - y \circ x; \ \forall\, x, y \ \in gl(V).$$

بهذه الطريقة يصبح $gl(V)$ جبر لي، ويسمى الجبر الخطي العام.

لكي نميز بين الصفة التجميعية وصفة جبر لي على $gl(V)$ سنرمز للجبر الخطي العام بـ $gl(V)$.

مثال 4:

ليكن الفضاء الشعاعي $gl(n,K)$ للمصفوفات من المرتبة $n \times n$ على الحقل K. نعرف قوس لي من خلال

$$[x,y] = xy - yx;\ \forall\, x,y\ \in gl(n,K).$$

بهذه الطريقة يصبح $gl(n,K)$ جبر لي والذي سنرمز له بالرمز $gl(n,K)$.

المصفوفات e_{ij} من المرتبة $n \times n$ حيث $1 \le i,j \le n$ حيث 1 يقع في الموقع (i,j) و 0 فيما عدا ذلك، تشكل قاعدة لـ $gl(n,K)$ وتحقق:

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{il} e_{jk}.$$

إن المثالان الأخيران يسمحان لنا مباشرة بالتعميم التالي الذي يوضح الرابط الوثيق بين الجبر التجميعي وجبر لي.

قضية:

إذا كان A جبر تجميعي على حقل K فإن:

$$[x,y] = xy - yx;\ \forall\, x,y\ \in A$$

هو قوس لي على A.

تظهر جبور لي في الرياضيات بشكل أساسي كفضاءات شعاعية لتحويلات خطية، وهذا يقود إلى التعريف التالي.

تعريف 4:

كل جبر جزئي من جبر خطي عام $gl(V)$ يسمى جبر لي الخطي.

مثال 5:

ليكن V فضاء شعاعي منته البعد بعده n على الحقل K، سنرمز بـ $sl(V)$ (نفسه $sl(n,K)$) للفضاء الجزئي من $gl(V)$ المكون من التطبيقات التي أثرها يساوي الصفر.

لكل $x,y \in gl(V)$ فإن $tr(x \circ y) = tr(y \circ x)$.

يكون $sl(V)$ جبر جزئي من $gl(V)$، ويسمى الجبر الجزئي الخاص. حيث: $dim\, dim\, sl(V)\ = n^2 - 1$.

تعريف 5:

جبر لي العقدي L ذو البعد n هو فضاء شعاعي عقدي بعده n مزود بجداء لي (يسمى أيضاً تبادلي أو قوس لي) $[x,y]$ من أجل كل $x,y \in L$ يحقق ما يلي:

1. قوس لي هو ثنائي الخطية:

$$[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x,z] + \beta[y,z];\ \forall\, x,y \in L\,, \alpha,\beta \in F.$$

2. غير تناظري (متناوب):

$$[x,x]=0\ ;\ \forall\, x\ \in L.$$

3. $$\big[x,[y,z]\big]+\big[y,[z,x]\big]+\big[z,[x,y]\big]=0;\ \forall\, x,y,z\ \in L.$$

تعريف 6:

الهومومورفيزم من جبر لي إلى جبر لي آخر، هو تطبيق خطي له الخاصية:

$$\varphi: L \longrightarrow m$$

$$\varphi([x,y]_L)=[\varphi(x),\varphi(y)]_m$$

لكل x و y من L.

نقول عن φ إنه إيزومورفيزم، إذا كان φ تقابل.

نقول إن الهومومورفيزم العام هو الهومومورفيزم المرافق:

$$ad_x: L \longrightarrow gl(x)$$

$$(ad_x)(y)=[x,y];\ \forall\, x,y\in L$$

مثال 6:

ليكن L جبر لي، عندئذ يوجد هومومورفيزم من L إلى $gl(V)$

$$ad: L \longrightarrow gl(V);\ x\to adx$$

يسمى التمثيل التوافقي. من الواضح أنه تطبيق خطي، وعلاوة على ذلك يتحقق:

$$ad[x,y](z)=\big[x,[y,z]\big]-\big[y,[x,z]\big]=[adx,ady](z)$$

تمثيل جبر لي:

لكل جبر لي يوجد تمثيل مصفوفي، هذه المصفوفات تؤثر على فضاء شعاعي V، عناصر هذا الفضاء هي أشعة في R^n. على سبيل المثال المصفوفة المربعة من المرتبة $n\times n$ من R^{n^2}. هذا التمثيل لجبر لي g الذي يؤثر على جبر لي نفسه يسمى التمثيل التوافقي.

تعريف 7:

يعرف تأثير جبر لي g على فضاء شعاعي g من خلال التطبيق

$$ad: g\times g\to g\ ;\ (a,b)\to ad_a(b)=[a,b]$$

يسمى هذا التطبيق بالتطبيق التوافقي لجبر لي، حيث تم ربط كل عنصر y من g بتطبيق خطي ad_y.

يمكننا ببساطة أن نبرهن أن ad تمثيل لجبر لي لكل x,y من جبر لي.

الإثبات: من أجل $x,y,w\in g$ فإن

$$\begin{aligned}[ad_x,ad_y](w)&=ad_x\Big(ad_y(w)\Big)-ad_y\big(ad_x(w)\big)\\&=ad_x([y,w])-ad_y([x,w])\\&=\big[x,[y,w]\big]-\big[y,[x,w]\big]\\&=\big[x,[y,w]\big]+\big[y,[w,x]\big]\\&=-\big[w,[x,y]\big]=\big[[x,y],w\big]=ad_{[x,y]}(w)\end{aligned}$$

مثال 7:

سنحسب التمثيل التوافقي المولد لـ $SO(3)$. لذلك يجب علينا أن نعرف جبر لي على الحقل العقدي C. لكي نتمكن من بناء التركيبات التالية:

$$t_{\pm} = t_x + it_y$$

العلاقات التبادلية للمولدات t_z, t_+, t_- معطاة حسب الجدول التالي:

	t_+	t_-	t_z
t_+	0	$2t_z$	$-\boldsymbol{t}_+$
t_-	$-2t_z$	0	$\boldsymbol{t}_-$
t_z	t_+	$-t_-$	$\mathbf{0}$

سنبحث عن التمثيل للمولدات لقاعدة مؤلفة من العناصر t_+, t_-, t_z، وبذلك نحصل على سبيل المثال للعمود الثاني للتمثيل التوافقي لـ t_+.

$$[t_+, t_-] = 0 \cdot t_+ + 0 \cdot t_- + 2 \cdot t_z \ \rightarrow (0\ 0\ 2\ )$$

ولذلك يكون التمثيل التام معطى كما يلي:

$$ad_{t_+}(\cdot) = [t_+,\cdot] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$ad_{t_-}(\cdot) = [t_-,\cdot] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$ad_{t_z}(\cdot) = [t_z,\cdot] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

التمثيل التوافقي لجبر لي العقدي منته البعد

في هذا القسم الأساسي من المقالة سنقوم بإثبات المبرهنة الأساسية التي تم صياغتها وصياغة إثباتها ضمن ثلاثة بنود أساسية.

مبرهنة 1:

ليكن g جبر لي العقدي ذو البعد n و $a_1, a_2, \dots, a_n$ قاعدة لجبر لي g. من أجل $a \in g$ و $ad(a)$ مصفوفة من المرتبة $n \times n$ معرفة بالشكل

$$[a, a_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(ad(a)\right)_{kj} a_k$$

لكل $j = 1,2, \dots, n$ مجموعة المصفوفات $ad(a)$ تقدم تمثيلاً ذو البعد n لـ g، والذي يدعى التمثيل التوافقي لـ g.

الإثبات:

1. لنبرهن أولاً أن $ad(a)$ معرف بشكل تام. إن $[a, a_j]$ هو عنصر معرف تماماً من g، والتركيب الخطي لعناصر قاعدة g هو أيضاً معرف تماماً. ومنه فإن الأعداد $\left(ad(a)\right)_{ij}$ معرفة تماماً. وهذا يعني أن $ad(a)$ معرف بشكل تام.
2. لنبرهن الآن أن:

$$ad(\alpha a + \beta b) = ad(a) + ad(b)$$

وذلك مهما يكن $a, b \in g$ و α و β من $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$.

في الحقيقة، ليكن j أحد اعمدة المصفوفة $ad(a)$ اختياري محدد، عندئذ:

$$[\alpha a + \beta b, a_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(ad(\alpha a + \beta b)\right)_{kj} . a_k \quad (I)$$

$$\alpha[a, a_j] + \beta[b, a_j] = \alpha \sum_{k=1}^{n} \left(ad(a)\right)_{kj} . a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} \left(ad(b)\right)_{kj} . a_k \quad (II)$$

حسب قاعدة حساب قوس لي فإن الطرف الايسر لكل من المعادلات (I) و (II) متساو. لذلك فإن الطرف الايمن كذلك متساو:

$$\alpha \sum_{k=1}^{n} \left(ad(a)\right)_{kj} . a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} \left(ad(b)\right)_{kj} . a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha . ad(a) + \beta . ad(b)\right)_{kj} . a_k \quad (III)$$

بما أن a_k ، $k = 1,2, \dots, n$ قاعدة فإن الامثال في الطرف الأيمن من المعادلات (I) و (III) متساوية أيضاً. وبذلك يتحقق لدينا مايلي:

$$\left(ad(\alpha a + \beta b)\right)_{kj} = \left(\alpha . ad(a) + \beta . ad(b)\right)_{kj}$$

وبالتالي فإن:

$$ad(\alpha a + \beta b) = \alpha . ad(a) + \beta . ad(b).$$

(3) لنبرهن أخيراً أن:

$$ad([a, b]) = [ad(a), ad(b)] \; ; \; \forall a \, , b \in g$$

بشكل مماثل لما تم في الأعلى، ليكن j أحد أعمدة المصفوفة $ad(a)$ اختياري ومحدد. عندئذ:

$$\left[[a, b], a_j\right] = \sum_{k=1}^{n} \left(ad([a, b])\right)_{kj} . a_k$$

حسب متطابقة جاكوبي وقاعدة الحساب لقوس لي نجد أن:

$$\left[[a, b], a_j\right] = -\left[[b, a_j], a\right] - \left[[a_j, a], b\right]$$
$$= -\left[[b, a_j], a\right] + \left[[a, a_j], b\right]$$

$$= -\left[\sum_{l=1}^{n}\left(ad(b)\right)_{lj}.\, a_l, a\right] + \left[\sum_{k=1}^{n}\left(ad(a)\right)_{kj}.\, a_k, b\right]$$

$$= -\sum_{l=1}^{n}\left(ad(b)\right)_{lj}.\, [a_l, a] + \sum_{l=1}^{n}\left(ad(a)\right)_{lj}.\, [a_l, b]$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\left(ad(b)\right)_{lj}.\, [a, a_l] - \sum_{l=1}^{n}\left(ad(a)\right)_{lj}.\, [b, a_l]$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\left(ad(b)\right)_{lj}.\left(\sum_{k=1}^{n}\left(ad(a)\right)_{kl}.\, a_k\right) - \sum_{l=1}^{n}\left(ad(a)\right)_{lj}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(ad(b)\right)_{kl}.\, a_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}\left(\left(ad(b)\right)_{lj}\left(ad(a)\right)_{kl} - \left(ad(a)\right)_{lj}\left(ad(b)\right)_{kl}\right)\right) a_k$$

ومنه:

$$\left(ad([a,b])\right)_{kj} = \sum_{l=1}^{n}\left(ad(a)_{kl}ad(b)_{lj} - ad(b)_{kl}ad(a)_{lj}\right)$$

وبالتالي فإن:

$$.ad([a,b]) = ad(a)ad(b) - ad(b)ad(a) = [ad(a), ad(b)]$$

وهو المطلوب.

الخاتمة والتوصيات.

تم في هذه المقالة دراسة أحد التمثيلات لجبر لي العقدي منته البعد بدلالة عناصر قاعدته والمصفوفة المرافقة لعنصر ما اختياري من عناصره. مما يعطي إضافة هامة لموضوع تمثيل جبور لي العقدية منتهية البعد بدلالة مفهوم المصفوفات والذي يمكن من خلال هذا المفهوم الذي تمت دراسته باستفاضة كبيرة من قبل الباحثين، والمألوف إلى حد كبير أكثر من باقي البنى الجبرية، أن يتم إيجاد خواص وعلاقات كثيرة تخص مفهوم جبور لي وتمثيلاتها. ونظراً لوجود التقابل بين جبر لي وزمر لي المتكاملة المترابطة، فيمكن ايجاد تمثيل توافقي لزمرة لي، لذلك فإن السؤال المطروح هو كيف يمكن تعريف الـ ad على زمرة وما هو شكل عناصر القاعدة لهذه الزمرة يبقى موضع سؤال للبحث في أعمال قادمة.

قائمة المراجع.

[1] Aschbacher, M. (2004). *The Status of the Classification of the Finite Simple Groups*. Notices of the American Mathematical Society. 51 (7). pp. 736–740.

[2] Bellamy, G. (2016). Lie groups, Lie algebras, and their representations, Lecture notes.

[3] Donaldson, S. K. (2007). Lectures on Lie groups and geometry, Lecture notes.

[4] Erdmann, K. & Wildon, M. (2006). Introduction to lie Algebras, Springer.

[5] Etingof , P. (2022). Lie groups and Lie algebras. arXiv:2201.09397

[6] Kurzweil, H. & Stellmacher, B. (2004). The theory of finite groups: an introduction. Springer-Verlag New York, Inc.

[7] Kirillov, A. (2008). Introduction to Lie groups and Lie algebras, Cambridge University Press.

[8] Ziller, W. (2010). Lie Groups. Representation Theory and Symmetric Spaces. Lecture notes, University of Pennsylvania

[9] Humphreys, J. (1972). Introduction to Lie-Algebren and Representation Theroy, Springer.