Arab Journal of Sciences and Research Publishing
Volume (8), Issue (1) : 30 Mar 2022
P: 75 - 87

AJSRP
ISSN: 2518- 5780

المجلة العربية للعلوم ونشـر الأبحـاث
المجلد (8)، العدد (1) : 30 مارس 2022 م
ص: 75 - 87

The Infinitesimal Holomorphically Projective Deformations of Special Parabolically Kahlerian Spaces

Namer Hasan Ebou

Faculty of Sciences || Al- Baath University || Syria

Abstract: We present the most important concepts related to the research: Kahler parabolic space, the holomorphic curve and the projective holomorphic mapping, then define the infinitesimal deformations between Kahler parabolic spaces and the infinitesimally projective holomorphic deformations in Kahler parabolic spaces, and we also find the necessary and sufficient conditions for the Kahler parabolic space $K_n^{0(m)}$ to be a non- trivially deformation holomorphic projective. Then we study the infinitesimally projective holomorphic deformation of semi- symmetric and symmetric Kahler parabolic spacesand affine equal Kahler parabolic spaces.

Keywords: An Infinitesimal Projective Holomorphic Deformation, Kahler Parabolic Space, Semi- symmetric Space.

التشوّهات الهولومورفيّة الإسقاطيّة اللامتناهية في الصغر لفضاءات كيلير المكافئيّة الخاصّة

نمر حسن إيبو

كلية العلوم || جامعة البعث || سوريا

المستخلص: نعرض أهم المفاهيم المتعلقة بالبحث: فضاء كيلير المكافئ والمنحني الهولومورفي والتطبيق الهولومورفي الإسقاطي، ثم نعرّف التشوّه اللامتناهي في الصغر بين فضاءات كيلير المكافئية والتشوّه الهولومورفي الإسقاطي اللامتناهي في الصغر بين فضاءات كيلير المكافئية. ونوجد الشروط اللازمة والكافية حتى يكون فضاء كيلير المكافئ $K_n^{0(m)}$ مُشوّهاً هولومورفياً إسقاطياً بشكل غير مُبتذل. ثم ندرس التشوّه الهولومورفي الإسقاطي اللامتناهي في الصغر لفضاءات كيلير المكافئيّة نصف المتناظرة والمتناظرة وفضاءات كيلير المكافئيّة المتماثلة تآلفيّاً.

الكلمات المفتاحية: تشوّه هولومورفي إسقاطي لامتناهي في الصغر، فضاء كيلير المكافئ، فضاء نصف المتناظر.

المقدمة.

تمت دراسة التطبيقات الجيوديزية والتشوّهات الجيوديزية اللامتناهية في الصغر بين فضاءات ريمان من قبل العديد من العلماء أمثال يفيموف وبغاريلف وفيكوا وغيرهم $[1,2]$.

كما كان لهندسة الفضاءات ذات التركيب الأفيني F_i^h أهميّة خاصّة للكثير من علماء الهندسة. بدأ شيركوف في عام 1925 بدراسة فضاءات ريمان الخاصّة والتي سمّاها $A-$فضاءات، هذه الفضاءات مزوّدة بتركيب أفيني مشتقّه موافق التغيّير معدوم، ومربّعه $F^2 = -E$، حيث E مصفوفة واحديّة، ودُعيت هذه الفضاءات بفضاءات كيلير النّاقصيّة.

أما من أجل الفضاءات الزائديّة والمكافئيّة والتي تركيبها يشابه $A-$فضاءات، فقد درسها راشيفيسكي وفشنيفسكي، بصورة مشابهة. وسُمّيت بفضاءات كيلير الزائديّة والمكافئيّة.

أمّا دراسة التطبيقات الهولومورفيّة الإسقاطيّة لفضاءات كيلير المكافئيّة كان قد بدأ بها فيشنيفسكي وحصل على المعادلات الأساسيّة لهذه التطبيقات ثم تابعها بعده العديد من العلماء [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

درسنا في المقالة [10] التشوّهات الهولومورفيّة الإسقاطيّة اللامتناهية في الصغر بين فضاءات كيلير المكافئية، ثم نتابع في هذا البحث دراسة التشوّهات الهولومورفيّة الإسقاطيّة اللامتناهية في الصغر لفضاءات كيلير المكافئيّة الخاصة وبالأخص في فضاءات كيلير المكافئيّة نصف المتناظرة والمتناظرة وفضاءات كيلير المكافئيةالمتماثلة تآلفياً.

مشكلة البحث:

تمت دراسة التشوّهات الجيوديزية اللامتناهية في الصغر بين فضاءات ريمان من قبل العديد من العلماء كما نوهنا أعلاه، وسوف ندرس في هذا البحث التشوّهات الهولومورفيّة الإسقاطيّة اللامتناهية في الصغر لفضاءات كيلير المكافئيّة الخاصة.

هدف البحث:

1- إيجاد الشروط اللازمة والكافية كي يكون السطح الفوقي مشوّهاً هولومورفياً إسقاطياً لا متناهياً في الصغر غير مبتذل.

2- إيجاد الشروط اللازمة والكافية كي يكون فضاء كيلير المكافئي $\tilde{k}_n$الناتج عن فضاء كيلير نصف المتناظر k_n بتشوّه هولومورفي إسقاطي لامتناهي في الصغر، فضاءً نصف متناظرٍ.

3- إيجاد علاقات أساسيّة بتأثير التشوّه الهولومورفي الإسقاطي اللامتناهي في الصغر لفضاءات كيلير المكافئيّة المتناظرة والمتماثلة تآلفياً.

أهميّة البحث:

للتشوّهات تطبيقات هامة جداً في مجال العلوم الرياضية والفيزيائيّة بما في ذلك الميكانيك النسبي والنظرية النسبيّة العامة، حيث تتعرض الأجسام والجزيئات والجسيمات الصغيرة بنتيجة حركتها إلى تشوّه ما.

مواد البحث وطرائقه:

نعرض فيما يأتي أهم المفاهيم والمبرهنات المتعلّقة بفضاءات كيلير المكافئية:

تعريف $(\mathbf{1})$: (قياس (مترك) ريمان) [12]

بفرض أنّ M_n منطوٍ تفاضلي أملس نقول إنه معرف على M_n قياس (مترك) ريمان، إذا وجد حقل تنسوري (تنسور) أملس $g = g(X,Y)$ من النوع$\binom{0}{2}$يحقق الخواص التالية:

أ- الحقل $g(X,Y)$ متناظر، أي:

$$g(X,Y) = g(Y,X) \quad \text{لكل} \quad X,Y \in D_0^1(M^n)$$

ب- $\det(g) \neq 0$ لكل $P \in M_n$.

نسمي التنسور $g(X,Y)$ تنسور ريمان.

تعريف (2): (فضاء ريمان)$[12]$

نسمي المنطوي الأملس M_n المعرف عليه تنسور ريمان $g\,(X\ ,Y\ )$ فضاء ريمان ذا البعد n ونرمز له بـV_n.

تعريف (3): تنسور ريمان – كريستوفيل R_{ijk}^{h} من النوع $[12]$: $\binom{1}{3}$

$$R_{ijk}^{h} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^{h}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^{h}}{\partial x^{k}} + \Gamma_{ik}^{\alpha}\Gamma_{\alpha j}^{h} - \Gamma_{ij}^{\alpha}\Gamma_{\alpha k}^{h}$$

تعريف (4): تنسور ريتشيR_{ij} من النوع $[12]$: $\binom{0}{2}$

$$R_{ij} = R_{ij\alpha}^{\alpha}$$

تعريف (5): (فضاء كيلير المكافئ)$[5,6,7,8]$

يسمى فضاء ريمان $V_n, -m$ فضاء كيلير المكافئ ونرمّزه بـ$K_{\mathrm{n}}^{0(\mathrm{m})}$ إذا وجد فيه بالإضافة إلى التنسورالمتري $g_{ij}(x)$ تركيب أفقي $F_i^h(x)$ رتبته $(m \geq 2)$ يحقق الشروط الآتية:

$$a)\ \ F_{\alpha}^{h}F_{i}^{\alpha} = 0$$

$$(1)b)\ \ F_{\alpha}^{h}g_{\alpha j} + F_{j}^{\alpha}g_{\alpha i} = 0$$

$$c)\ \ F_{i,j}^{h} = \frac{\partial F_{i}^{h}}{\partial x^{j}} + F_{i}^{\alpha}\Gamma_{\alpha j}^{h} - F_{\alpha}^{h}\Gamma_{ij}^{\alpha} = 0$$

حيث "," تعني المشتق موافق التغير، و Γ_{ij}^{h} رموز كريستوفيل من النوع الثاني للفضاء $K_{\mathrm{n}}^{0(\mathrm{m})}$.

تعريف (6): (المنحني الهولومورفي) $[9]$

نسمي المنحني $\ell: x^h = x^h(t)$ في فضاء كيلير المكافئ $K_n^{0(m)}$ منحنياً مستوياً تحليليّاً (هولومورفياً) إذا تحققت على طول المنحني الشروط:

$$\frac{d\lambda^{h}}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta}^{h}\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta} = \rho_1(t)\lambda^{h} + \rho_2(t)\bar{\lambda}^{h}$$

حيث $\lambda^h = \frac{dx^h}{dt}$ متجه المماس للمنحني ℓ، و $\bar{\lambda}^h = \lambda^{\alpha}F_{\alpha}^{h}$، و$\rho_1, \rho_2$ دالتان ما تتبعان للمتغيّرt.

تعريف (7): (التطبيق الهولومورفي الإسقاطي) $[9]$

ليكن لدينا فضاءي كيلير المكافئيين $K_n^{0(m)}(g_{ij}, F_i^h)$و$\bar{K}_n^{0(\bar{m})}(\bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ يُسمى التطبيق من فضاء كيلير المكافئ $K_n^{0(m)}$ إلى فضاء كيلير المكافئ $\bar{K}_n^{0(\bar{m})}$، تطبيقاً هولومورفياً إسقاطياً إذا نقل كل منحنٍ مستوٍ تحليلي من $K_n^{0(m)}$ إلى منحنٍ مستوٍ تحليلي في $\bar{K}_n^{0(\bar{m})}$.

مبرهنة $[4]$: (1)

يُطبق فضاء كيلير المكافئ $K_n^{0(m)}$ هولومورفياً إسقاطياً على فضاء كيلير المكافئ $\bar{K}_n^{0(\bar{m})}$، إذا وفقط إذا تحققت الشروط الآتية في أي نظام إحداثي عام x:

$$a)\ \ \bar{\Gamma}_{ij}^{h}(x) = \Gamma_{ij}^{h}(x) + \delta_{(i}^{h}\bar{\psi}_{j)} + F_{(i}^{h}\psi_{j)}$$

$$(2)b)\ \ \bar{F}_{i}^{h}(x) = \alpha F_{i}^{h}(x)$$

حيث $\Gamma_{ij}^{h}, \bar{\Gamma}_{ij}^{h}$ مركبات الصلة للفضاءين $K_n^{0(m)}$ و $\bar{K}_n^{0(\bar{m})}$ على الترتيب، ψ_i متجه تدرّج ما، و$\bar{\psi}_i \equiv \psi_{\bar{\imath}}$، و α ثابت غير معدوم.

مبرهنة [4] :(2)

يُطبّق فضاء كيلير المكافئ $K_n^{0(m)}$ تطبيقاً هولومورفياً إسقاطياً على الفضاء $\overline{K}_n^{0(\overline{m})}$ إذا وفقط إذا تحققت في $K_n^{0(m)}$ العلاقات:

$$a)\ \bar{g}_{ij,k} = 2\bar{\psi}_k \bar{g}_{ij} + \bar{\psi}_{(i}\bar{g}_{j)k} + \psi_{(i}\bar{F}_{j)k}$$
$$b)\ \bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0 \qquad (3)$$

حيث: $\bar{F}_{ij} \equiv \bar{g}_{i\alpha}F_j^{\alpha}$، و $\bar{g}_{ij}$, $det\|\bar{g}_{ij}\| \neq 0$ التنسور المتري للفضاء $\overline{K}_n^{0(m)}$.

مبرهنة [4] :(3)

الشرط اللازم والكافي ليكون فضاء كيلير المكافئ $K_n^{0(m)}$ منطلقاً لتطبيق هولومورفي إسقاطي، هو أن يوجد في هذا الفضاء تنسور a_{ij} من النوع $\binom{0}{2}$ متناظر غير صفري، ويحقق الشروط:

$$a)\ a_{ij,k} = \lambda_{(\bar{\imath}}g_{j)k} + \lambda_{(i}g_{\bar{\jmath})k}$$
$$(4) b)\ a_{\bar{\imath}j} + a_{i\bar{\jmath}} = 0$$

حيث: λ_i متجه ما، والتطبيق يكون غير مبتذل ضمن الشرط $\lambda_i \neq 0$.

ملاحظة: [4]

العلاقة بين تنسوري ريمان $R_{ijk}^h, \bar{R}_{ijk}^h$ للفضاءين $K_n^{0(m)}, \overline{K}_n^{0(m)}$ على الترتيب والموجود بينهما تطبيق هولومورفي إسقاطي، هي:

$$(5)\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \delta_k^h\psi_{ij} - \delta_j^h\psi_{ik} + F_k^h\psi_{ij} - F_j^h\psi_{ik} + F_i^h\psi_{[kj]}$$

حيث:

$$(6)\psi_{ij} \equiv \psi_{i,j} - \bar{\psi}_i\psi_j - \psi_i\bar{\psi}_j\ ; \quad \bar{\psi}_{ij} \equiv \psi_{\bar{\imath}j}$$

التنسور $\bar{\psi}_{ij}$ له الشكل:

$$(7)\bar{\psi}_{ij} \equiv \bar{\psi}_{i,j} - \bar{\psi}_i\bar{\psi}_j$$

تعريف [4] :(8)

يُسمى فضاء كيلير المكافئ $K_n^{0(m)}$ فضاءً نصف متناظر، إذا حقّق تنسور ريمان R_{ijk}^h للفضاء العلاقة:

$$(8)R_{ijk,lm}^h - R_{ijk,ml}^h = 0.$$

تعريف [4] :(9)

يُسمى فضاء كيلير المكافئ $K_n^{0(m)}$ فضاءً متناظراً، إذا حقّق تنسور ريمان R_{ijk}^h للفضاء العلاقة الآتية:

$$(9)R_{ijk,l}^h = 0.$$

تعريف [4] :(10)

يُسمى فضاء كيلير المكافئ $K_n^{0(m)}$ فضاءً متماثلاً تآلفيّاً، إذا حقّق تنسور ريتشي R_{ij} للفضاء العلاقة الآتية:

$$(10)R_{ij} = R_{ji}$$

مبرهنة [4] :(4):

إذا وجد تطبيق هولومورفي إسقاطي لا متناهٍ في الصغر غير مُبتذل بين فضاء كيلير المكافئ المتماثل تآلفيّاً $K_n^{0(m)}$ وفضاء كيلير المكافئ $\overline{K}_n^{0(m)}$، فإنّ الفضاء $\overline{K}_n^{0(m)}$ يكون بدوره متماثلاً تآلفيّاً.

سوف نرمز اختصاراً فيما يأتي لفضاء كيلير المكافئ $K_n^{0(m)}$ بالرمز k_n.

تعريف (11):

ليكن k_m فضاء كيليرالمكافئ المنسوب إلى نظام إحداثي محلي $(y^1, \dots, y^m)$ عندئذٍ تحدد العلاقات:

$$(11)y^\alpha = f^\alpha(\chi^1, \chi^2, \dots, \chi^n) \quad ; Rang \left\| \frac{\partial f^\alpha}{\partial \chi^i} \right\| = n < m$$

حيث: $Rang \left\| \frac{\partial f^\alpha}{\partial \chi^i} \right\|$ هو رتبة المصفوفة $\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial \chi^i} \right)$.

فضاءً جزئياً $k_n \subset k_m$.

إذا كان g_{ij} و$a_{\alpha\beta}$ التنسور المتري لk_nو k_m على الترتيب فإنّه من[2] نجد:

$$(12)g_{ij} = a_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial \chi^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial \chi^i}$$

حيث: $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m$ و $i, j = 1, 2, \dots, n$ إذا لم نشر إلى غير ذلك.

ليكن $\xi^\alpha(\chi^1, \chi^2, \dots, \chi^n)$ حقل متجهي مخالف التغير في k_m مُعطى في النقطة M من k_n.

عندئذٍ تُحدد العلاقات:

$$\tilde{y}^\alpha = y^\alpha(\chi) + \varepsilon\xi^\alpha(\chi) \;\; ; \; \alpha = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

حيث: ε وسيط ذو قيمة صغيرة، فضاءً $\tilde{k}_n$ يُسمى التشوّه اللامتناهي في الصغر للفضاء k_n ويُسمى الحقل$\xi^\alpha(\chi)$ حقل الإزاحة وξ^αيُسمى متجه الإزاحة.

في دراستنا للفضاء $\tilde{k}_n$ سوف نسقط ε^2 وكل ما يزيد عن ε^2 على اعتبار أنّ ε مقدار صغير.

لندرس ضمن هذه التشوّهات، التشوّهات الهولومورفية اللامتناهية في الصغر من المرتبة الأولى:

بفرض $A = A(\chi^1, \chi^2, \dots, \chi^n)$ مقدار ما في الفضاء k_n (تنسور، صلة، دالة، ...)

عندئذٍ يوجد في $\tilde{k}_n$ ما يقابله $\tilde{A} = \tilde{A}(\chi^1, \chi^2, \dots, \chi^n, \varepsilon)$ الذي يمكن التعبير عنه بالشكل:

$$(14)\tilde{A}(\chi, \varepsilon) = A(\chi) + \varepsilon\delta A + \varepsilon^2\delta^2 A + \cdots + \varepsilon^n\delta^n A + \cdots$$

قيمة وسيط التشوّه ε في العلاقة (14) تُحدد على اعتبار أن المتسلسلة في (14) متقاربة دون النظر إلى $A(\chi)$.

تُسمى المعاملات في العلاقة (14): $\delta A, \delta^2 A$, ... على الترتيب القيمة الأولى والثانية لتغير A بتأثير التشوّهات اللامتناهية في الصغر ل k_n. [1]

سوف نهتم بمبرهنة التغيّر التي نوهنا عنها أعلاه. عندما تنتهي هذه المتسلسلة عند الحد الثاني، أي سوف ندرس التشوّهات اللامتناهية في الصغر من المرتبة الأولى ل k_n وفي كثير من الأحيان نُطلق عليها اسم التشوّهات اللامتناهية في الصغر أو التشوهات للاختصار.

عندئذٍ يُكتب التنسور المتري ل $\tilde{k}_n$ على النحو:

$$\tilde{g}^{ij} = g^{ij} + \varepsilon\delta g^{ij} \text{ و } (15)\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + \varepsilon\delta g_{ij}$$

تعريف $(\mathbf{12})$:

يُسمى التشوّه اللامتناهي في الصغر تشوّهاً هولومورفيّاً إسقاطياً إذا حافظ على الخطوط الهولومورفيّة.

مبرهنة $[\mathbf{10}]$:$(\mathbf{5})$

إنّ الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء كيليرالمكافئ k_n مشوّهاً هولومورفيّاً إسقاطيّاً لا متناهياً في الصغر هوأن يتواجد فيه تنسور متناظر h_{ij} يحقق الشروط:

$$a)\ h_{ij,k} = 2\bar{\psi}_k\tilde{g}_{ij} + \bar{\psi}_{(i}\tilde{g}_{j)k} + \bar{\psi}_{(i}\bar{F}_{j)k}$$

$$b)\ h_{\bar{\imath}\bar{j}} + h_{i\bar{j}} = 0(16)$$

حيث: $\bar{\psi}_i$ متجه تدرّج وψ_iو $\bar{\psi}_i = \psi_{\bar{\imath}} = \psi_\alpha F_i^\alpha$ متّجه ما.

تمهيديّة $[\mathbf{10}]$:$(\mathbf{1})$

تتحقّق بتأثير التشوّه الهولومورفي الإسقاطي اللامتناهي في الصغر للفضاء k_n، العلاقات الآتية:

$$\delta R_{ijk}^h = \left(\delta\Gamma_{ik}^h\right)_{,j} - \left(\delta\Gamma_{ij}^h\right)_{,k}(17)$$

حيث: R_{ijk}^h تنسور ريمان للفضاء k_n، و Γ_{ij}^h رموز كريستوفيل.

مبرهنة $[\mathbf{10}]$:$(\mathbf{6})$

إنّ تغيّر تنسوري ريمان وريتشي للفضاء k_n بتأثير التشوّه الهولومورفي الإسقاطي اللامتناهي في الصغر للفضاء k_n، يُعطى بالعلاقات:

$$\left.\begin{array}{c} a)\ \delta\ R_{ijk}^h = \delta_k^h\bar{\psi}_{i,j} - \delta_j^h\bar{\psi}_{i,k} + F_k^h\psi_{i,j} - F_j^h\psi_{i,k} + F_i^h\psi_{[k,j]} \\ b)\ \delta R_{ij} = -n\bar{\psi}_{j,i} \end{array}\right\}(18)$$

حيث: " , " تعني المشتق الموافق التغيّر في الفضاء k_n. و$\bar{\psi}_i = \psi_{\bar{\imath}}$ متّجه تدرّج.

مبرهنة $[\mathbf{11}]$:$(\mathbf{7})$

تتحقّق في التشوّه الهولومورفي الإسقاطي اللامتناهي في الصغر غير المبتذل لفضاء كيلير المكافئ K_{n}، العلاقات الآتية:

$$\left.\begin{array}{c} a)\ \delta\Gamma_{ij}^{h}=\frac{1}{n+2}\left(\delta\Gamma_{i\alpha}^{\alpha}\delta_{j}^{h}-\delta\Gamma_{j\alpha}^{\alpha}\delta_{i}^{h}\right)+\delta T_{(i}F_{j)}^{h} \\ b)\ \delta R_{\bar{\imath}jk}^{h}=\frac{1}{n}\left(F_{k}^{h}\delta R_{ij}-F_{j}^{h}\delta R_{ik}\right) \\ c)\ \delta R_{\bar{\imath}jk}^{h}=\delta R_{ij\bar{k}}^{h} \\ d)\ \delta R_{\bar{\imath}jk}^{h}=F_{j}^{h}\bar{\psi}_{k,i}-F_{k}^{h}\bar{\psi}_{j,i} \\ e)\ \delta R_{ijk}^{h}=\frac{1}{n}\left(\delta_{k}^{h}\delta R_{ij}-\delta_{j}^{h}\delta R_{ik}\right)+F_{k}^{h}\delta P_{ij}-F_{j}^{h}\delta P_{ik}+F_{i}^{h}\delta P_{[jk]} \end{array}\right\} \quad (19)$$

حيث: R_{ijk}^{h} تنسور ريمان للفضاء K_{n} وR_{ij} تنسور ريتشي للفضاء K_{n} و$\bar{\psi}_{\mathrm{i}}$ متّجه تدرج، T_i متّجه ما و $R_{\bar{\imath}jk}^{h}=R_{\alpha jk}^{h}F_{i}^{\alpha}$.

عرض النتائج.

مبرهنة (8):

إنّ الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء كيلير المكافئ k_n مشوّهاً هولومورفيّاً إسقاطيّاً لا متناهٍ في الصغر غير مبتذل هو أن يكون مطبقاً هولومورفيّاً إسقاطيّاً غير مبتذل.

مبرهنة (9):

إذا وجد تشوّه هولومورفي إسقاطي لا متناهي في الصغر غير مُبتذل بين فضاء كيلير المكافئ نصف المتناظر k_n وفضاء كيلير المكافئ $\bar{k}_n$، فإنّ الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء $\bar{k}_n$ فضاء نصف متناظر، هو أن يكون الفضاء k_n فضاءً سويّاً. أي يجب أن يتحقّق:

$$R_{ijk}^{h}=0$$

حيث R_{ijk}^{h} تنسور ريمان للفضاء k_n.

مبرهنة (10):

تتحقّق في التشوّه الهولومورفي الإسقاطي اللامتناهي في الصغر غير المبتذل لفضاء كيلير المكافئ المتناظر K_{n}، العلاقات الآتية:

$$\left.\begin{array}{c} a)\ \left(\delta\Gamma_{ik}^{h}\right)_{,jl}=\left(\delta\Gamma_{ij}^{h}\right)_{,kl} \\ b)\ \delta_{k}^{h}\bar{\psi}_{i,jl}-\delta_{j}^{h}\bar{\psi}_{i,kl}+F_{k}^{h}\psi_{i,jl}-F_{j}^{h}\psi_{i,kl}+F_{i}^{h}\psi_{[k,j]l}=0 \\ c)\ F_{j}^{h}\bar{\psi}_{k,il}-F_{k}^{h}\bar{\psi}_{j,il}=0 \\ d)\ F_{k}^{h}\delta P_{ij,l}-F_{j}^{h}\delta P_{ik,l}+F_{i}^{h}\delta P_{[jk],l}=0 \end{array}\right\}$$

مبرهنة (11):

إذا وجد تشوّه هولومورفي إسقاطي لا متناهٍ في الصغر غير مُبتذل بين فضاء كيلير المكافئ المتماثل تآلفيّاً k_n وفضاء كيلير المكافئ $\bar{k}_n$، فإنّ الفضاء $\bar{k}_n$ يكون بدوره متماثلاً تآلفيّاً.

مبرهنة (12):

تتحقّق في التشوّه الهولومورفي الإسقاطي اللامتناهي في الصغر غير المبتذل لفضاء كيلير المكافئي المتماثل تآلفياً K_n، العلاقات الآتية:

$$\left.\begin{aligned} a)\ \delta R^h_{ijk} &= \frac{1}{n}\left(\delta^h_k \delta R_{ij} - \delta^h_j \delta R_{ik}\right) + F^h_k \delta P_{ij} - F^h_j \delta P_{ik} + F^h_i \delta P_{[jk]} \\ b)\ \delta R_{ij} &= \delta R_{ji} \\ c)\ \delta P_{ij} &= \delta P_{ji} \end{aligned}\right\}$$

المناقشة.

إثبات المبرهنة (8):

$(\Leftarrow)$(لزوم الشرط):

لنفرض أنّ فضاء كيلير المكافئي k_n مشوّهاً هولومورفيّاً إسقاطيّاً لا متناهٍ في الصغر غير مبتذل، عندئذٍ الشروط $(21-a)$ تُكتب بالشكل:

$$h_{ij,k} - 2\bar{\psi}_k \tilde{g}_{ij} = \bar{\psi}_{(i}\tilde{g}_{j)k} + \bar{\psi}_{(i}\bar{F}_{j)k}$$

$$\Rightarrow \left(h_{ij} - 2\bar{\psi}\tilde{g}_{ij}\right)_{,k} = \bar{\psi}_{(i}\tilde{g}_{j)k} + \bar{\psi}_{(i}\bar{F}_{j)k} (20)$$

حيث: $\psi_i \neq 0$ متجه ما و $\bar{\psi}_i \neq 0$ متجه تدرّج (التشوه غير مبتذل فرضاً).

أي أنّه يوجد في k_n تنسور متناظر $a_{ij} = h_{ij} - 2\bar{\psi}g_{ij}$ يحقق الشرط:

$$a_{ij,k} = \bar{\psi}_{(i}\tilde{g}_{j)k} + \bar{\psi}_{(i}\bar{F}_{j)k}$$

وبما أنّ $F_{jk} = -F_{kj} = -g_{k\alpha}F^\alpha_j = -g_{\bar{j}k}$ نعوض في العلاقة السابقة نجد:

$$a_{ij,k} = \bar{\psi}_{(i}g_{j)k} - \psi_{(i}g_{\bar{j})k} (21)$$

من العلاقة: $a_{ij} = h_{ij} - 2\bar{\psi}g_{ij}$ نجد:

$$a_{\bar{\imath}j} = h_{\bar{\imath}j} - 2\bar{\psi}g_{\bar{\imath}j} (22)$$

$$a_{i\bar{j}} = h_{i\bar{j}} - 2\bar{\psi}g_{i\bar{j}} (23)$$

بجمع هاتين العلاقتين (22)و (23) طرفاً لطرف نجد:

$$a_{\bar{\imath}j} + a_{i\bar{j}} = \underbrace{h_{\bar{\imath}j} + h_{i\bar{j}}}_{=0} - 2\bar{\psi}\underbrace{\left(g_{\bar{\imath}j} + g_{i\bar{j}}\right)}_{=0}$$

وبما أنّ $g_{\bar{\imath}j} + g_{i\bar{j}} = 0$ حسب تعريف فضاء كيلير المكافئي و $h_{\bar{\imath}j} + h_{i\bar{j}} = 0$ حسب $(16-b)$.

إذاً: $$a_{\bar{\imath}j} + a_{i\bar{j}} = 0 \qquad (24)$$

من العلاقات (21)و (24) واستناداً إلى (المبرهنة (3)) حيث $\lambda_i = \psi_i \neq 0$، نستنتج أنّ فضاء كيلير المكافئي k_n يُطبق هولومورفياً إسقاطياً غير مبتذل. تم إثبات لزوم الشرط.

$(\Rightarrow)$(كفاية الشرط):

والعكس صحيح، لنفرض أنّ فضاء كيلير المكافئي k_n يطبق هولومورفياً إسقاطياً غير مبتذل، عندئذٍ استناداً إلى (المبرهنة (3)) يوجد في هذا الفضاء تنسور a_{ij} من النوع $\binom{0}{2}$ متناظر غير صفري ويحقق الشروط:

$$\left.\begin{aligned} a)\ a_{ij|k} &= \lambda_{(\bar{\imath}}g_{j)k} - \lambda_{(i}g_{\bar{\jmath})k} \\ b)\ a_{\bar{\imath}j} + a_{i\bar{\jmath}} &= 0 \end{aligned}\right\} (25)$$

حيث $\lambda_i \neq 0$ متجه ما، لأن التطبيق غير مبتذل و$F_{jk} = -g_{\bar{\jmath}k}$ و$\bar{\lambda}_i = \lambda_{\bar{\imath}} = \lambda_\alpha F_i^\alpha$.

يمكن كتابة الشروط $(25-a)$ بالشكل:

$$a_{ij,k} = \lambda_{(i}g_{j)k} - \lambda_{(i}F_{j)k}$$
$$\Rightarrow a_{ij,k} + 2\bar{\lambda}_k g_{ij} = 2\bar{\lambda}_k g_{ij} + \lambda_{(i}g_{j)k} - \lambda_{(i}F_{j)k}$$
$$\Rightarrow \left(a_{ij} + 2\bar{\lambda} g_{ij}\right)_{|k} = 2\bar{\lambda}_k g_{ij} + \lambda_{(i}g_{j)k} - \lambda_{(i}F_{j)k}$$

بفرض: $h_{ij} = a_{ij} + 2\bar{\lambda} g_{ij}$ و$\psi_i = \lambda_i \neq 0$ نعوض في العلاقة السابقة نجد:

$$h_{ij,k} = 2\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_{(i}g_{j)k} + \lambda_{(i}F_{j)k} (26)$$

وأيضاً:

$$h_{\bar{\imath}j} = a_{\bar{\imath}j} + 2\bar{\lambda} g_{\bar{\imath}j}$$
$$h_{i\bar{\jmath}} = a_{i\bar{\jmath}} + 2\bar{\lambda} g_{i\bar{\jmath}}$$
$$\Rightarrow h_{\bar{\imath}j} + h_{i\bar{\jmath}} = a_{\bar{\imath}j} + a_{i\bar{\jmath}} + 2\bar{\lambda}\underbrace{\left(g_{\bar{\imath}j} + g_{i\bar{\jmath}}\right)}_{=0}$$
$$\Rightarrow h_{\bar{\imath}j} + h_{i\bar{\jmath}} = 0 \qquad (27)$$

من العلاقات (27)و(26) واستناداً إلى (المبرهنة (5)) نجد أنّ k_n مشوّهاً هولومورفيّاً إسقاطيّاً لا متناهٍ في الصغر غير مبتذل. تم إثبات كفاية الشرط.

إثبات المبرهنة (9):

بفرض وجود تشوّه هولومورفي إسقاطي لا متناهي في الصغر غير مبتذل بين فضاء كيلير المكافئ نصف المتناظر k_n وفضاء كيلير المكافئ $\tilde{k}_n$، وبالتالي فإنّ العلاقة بين تنسور ريمان R_{ijk}^h لفضاء كيلير k_n وتنسور ريمان $\tilde{R}_{ijk}^h$ لفضاء كيلير $\tilde{k}_n$، استناداً على العلاقة (5)، هي:

$$\tilde{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \delta_k^h \bar{\psi}_{ij} - \delta_j^h \bar{\psi}_{ik} + F_k^h \psi_{ij} - F_j^h \psi_{ik} + F_i^h \psi_{[kj]}$$

بأخذ المشتق موافق التغيّر بالنسبة للدليل l للعلاقة السابقة، نجد:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ijk,l}^h = {} & R_{ijk,l}^h + \delta_{k,l}^h \bar{\psi}_{ij} + \delta_k^h \bar{\psi}_{ij,l} - \delta_{j,l}^h \bar{\psi}_{ik} - \delta_j^h \bar{\psi}_{ik,l} + F_{k,l}^h \psi_{ij} \\ & + F_k^h \psi_{ij,l} - F_{j,l}^h \psi_{ik} - F_j^h \psi_{ik,l} + F_{i,l}^h \psi_{[kj]} + F_i^h \psi_{[kj],l} \end{aligned}$$

و بما أنّ $F_{k,l}^h = 0$ و$\delta_{k,l}^h = 0$ نعوض في العلاقة السابقة، نجد:

$$\tilde{R}_{ijk,l}^h = R_{ijk,l}^h + \delta_k^h \bar{\psi}_{ij,l} - \delta_j^h \bar{\psi}_{ik,l} + F_k^h \psi_{ij,l} - F_j^h \psi_{ik,l} + F_i^h \psi_{[kj],l}$$

بأخذ المشتق موافق التغيّر بالنسبة للدليل m للعلاقة السابقة، نجد:

$$\begin{aligned} (28)\tilde{R}_{ijk,lm}^h = {} & R_{ijk,lm}^h + \delta_k^h \bar{\psi}_{ij,lm} - \delta_j^h \bar{\psi}_{ik,lm} + F_k^h \psi_{ij,lm} \\ & - F_j^h \psi_{ik,lm} + F_i^h \psi_{[kj],lm} \end{aligned}$$

بالمبادلة بين الدليلين $l \leftrightarrow m$ في العلاقة (28)، نجد:

$$(29)\tilde{R}_{ijk,ml}^h = R_{ijk,ml}^h + \delta_k^h \bar{\psi}_{ij,ml} - \delta_j^h \bar{\psi}_{ik,ml} + F_k^h \psi_{ij,ml}$$

$$-F_j^h\psi_{ik,ml} + F_i^h\psi_{[kj],ml}$$

بطرح العلاقة (29) من العلاقة (28)، نجد:

$$\tilde{R}^h_{ijk,lm} - \tilde{R}^h_{ijk,ml} = R^h_{ijk,lm} - R^h_{ijk,ml} + \delta_k^h\bar{\psi}_{ij,lm} - \delta_k^h\bar{\psi}_{ij,ml}$$
$$-\delta_j^h\bar{\psi}_{ik,lm} + \delta_j^h\bar{\psi}_{ik,ml} + F_k^h\psi_{ij,lm} - F_k^h\psi_{ij,ml} - F_j^h\psi_{ik,lm}$$
$$+F_j^h\psi_{ik,ml} + F_i^h\psi_{[kj],lm} - F_i^h\psi_{[kj],ml}$$

وبما أن الفضاء k_n نصف متناظر نجد $R^h_{ijk,lm} - R^h_{ijk,ml} = 0$، نعوض في العلاقة السابقة نحصل على:

$$(30)\tilde{R}^h_{ijk,lm} - \tilde{R}^h_{ijk,ml} = \delta_k^h\left(\bar{\psi}_{ij,lm} - \bar{\psi}_{ij,ml}\right) - \delta_j^h\left(\bar{\psi}_{ik,lm} - \bar{\psi}_{ik,ml}\right)$$
$$+F_k^h\left(\psi_{ij,lm} - \psi_{ij,ml}\right) - F_j^h\left(\psi_{ik,lm} - \psi_{ik,ml}\right)$$
$$+F_i^h\left(\psi_{kj,lm} - \psi_{jk,lm} - \psi_{kj,ml} + \psi_{jk,ml}\right)$$

و لكن استناداً على مطابقة ريتشي، نجد:

$$\bar{\psi}_{ij,lm} - \bar{\psi}_{ij,ml} = \bar{\psi}_{\alpha j}R^\alpha_{ilm} + \bar{\psi}_{i\alpha}R^\alpha_{jlm}$$

نعوض في العلاقة (30)، نجد:

$$\tilde{R}^h_{ijk,lm} - \tilde{R}^h_{ijk,ml} = \delta_k^h\left(\bar{\psi}_{\alpha j}R^\alpha_{ilm} + \bar{\psi}_{i\alpha}R^\alpha_{jlm}\right) - \delta_j^h(\bar{\psi}_{\alpha k}R^\alpha_{ilm} + \bar{\psi}_{i\alpha}R^\alpha_{klm})$$
$$+F_k^h\left(\psi_{\alpha j}R^\alpha_{ilm} + \psi_{i\alpha}R^\alpha_{jlm}\right) - F_j^h(\psi_{\alpha k}R^\alpha_{ilm} + \psi_{i\alpha}R^\alpha_{klm})$$
$$+F_i^h\left(\psi_{\alpha j}R^\alpha_{klm} + \psi_{k\alpha}R^\alpha_{jlm} - \psi_{\alpha j}R^\alpha_{ilm} - \psi_{k\alpha}R^\alpha_{jlm}\right)$$

و حتى تتحقّق العلاقة:

$$\tilde{R}^h_{ijk,lm} - \tilde{R}^h_{ijk,ml} = 0$$

يجب أن يتحقّق الشرط:

$$R^h_{ijk} = 0$$

أي يجب أن يكون الفضاء k_n فضاء سوياً. تم إثبات المبرهنة.

إثبات المبرهنة (10):

تتحقّق في التشوّه الهولومورفي الإسقاطي اللامتناهي في الصغر غير المبتذل للفضاء K_nاستناداً على (التمهيديّة (1)) العلاقة الآتية:

$$(31)\delta R^h_{ijk} = \left(\delta\Gamma^h_{ik}\right)_{,j} - \left(\delta\Gamma^h_{ij}\right)_{,k}$$

بأخذ المشتق موافق التغيّر بالنسبة للدليل l للعلاقة السابقة نجد:

$$(32)\delta R^h_{ijk,l} = \left(\delta\Gamma^h_{ik}\right)_{,jl} - \left(\delta\Gamma^h_{ij}\right)_{,kl}$$

و بما أنّ الفضاء K_n هو فضاء متناظر عندئذٍ تتحقق العلاقة:

$$R^h_{ijk,l} = 0. \Longrightarrow \delta R^h_{ijk,l} = 0$$

نعوض في العلاقة (32) نجد:

$$\left(\delta\Gamma^h_{ik}\right)_{,jl} = \left(\delta\Gamma^h_{ij}\right)_{,kl}$$

و هي نفسها العلاقة (a).

يتغيّر تنسور ريمان استناداً على (المبرهنة (6)) وفق العلاقة:

$$\delta\, R_{ijk}^{h} = \delta_k^h \bar{\psi}_{i,j} - \delta_j^h \bar{\psi}_{i,k} + F_k^h \psi_{i,j} - F_j^h \psi_{i,k} + F_i^h \psi_{[k,j]}$$

بأخذ المشتق موافق التغيّر بالنسبة للدليل l للعلاقة السابقة، ثم تعويض $\delta R_{ijk,l}^{h} = 0$، نجد:

$$\delta_k^h \bar{\psi}_{i,jl} - \delta_j^h \bar{\psi}_{i,kl} + F_k^h \psi_{i,jl} - F_j^h \psi_{i,kl} + F_i^h \psi_{[k,j]l} = 0$$

وهي نفسها العلاقة (b).

نجد استناداً على(المبرهنة (7)) أنّ:

$$\delta R_{\bar{i}jk}^{h} = F_j^h \bar{\psi}_{k,i} - F_k^h \bar{\psi}_{j,i}$$

بأخذ المشتق موافق التغيّر بالنسبة للدليل l للعلاقة السابقة، ثم تعويض $\delta R_{\bar{i}jk,l}^{h} = 0$، نجد:

$$F_j^h \bar{\psi}_{k,il} - F_k^h \bar{\psi}_{j,il} = 0$$

وهي نفسها العلاقة (c).

نجد استناداً على (المبرهنة (7))أنّ:

$$R_{ijk}^{h} = \frac{1}{n}\left(\delta_k^h \delta R_{ij} - \delta_j^h \delta R_{ik}\right) + F_k^h \delta P_{ij} - F_j^h \delta P_{ik} + F_i^h \delta P_{[jk]}$$

بأخذ المشتق موافق التغيّر بالنسبة للدليل l للعلاقة السابقة، ثم تعويض $\delta R_{\bar{i}jk,l}^{h} = 0$

و$\delta R_{ij,l} = 0$، نجد:

$$F_k^h \delta P_{ij,l} - F_j^h \delta P_{ik,l} + F_i^h \delta P_{[jk],l} = 0$$

وهي نفسها العلاقة (d).

إثبات المبرهنة (11):

بفرض أنّه يوجد تشوّه هولومورفي إسقاطي لا متناهٍ في الصغر غير مُبتذل بين فضاء كيلير المكافئي المتناظر k_n وفضاء كيلير المكافئي $\tilde{k}_n$، عندئذٍ استناداً على (المبرهنة (8))فإنّه يوجد تطبيق هولومورفي إسقاطي غير مُبتذل بين الفضاء k_n والفضاء $\tilde{k}_n$.

وبما أ الفضاء k_n هو فضاء متماثل تآلفيّاً، عندئذٍ استناداً على (المبرهنة (4))، نجد أن الفضاء $\tilde{k}_n$ هو بدوره فضاء متماثل تآلفيّاً.

تم إثبات المبرهنة.

إثبات المبرهنة (12):

نجد استناداً على (المبرهنة (7)) وتحديداً العلاقة $(19-e)$ أنّ:

$$(33)\delta R_{ijk}^{h} = \frac{1}{n}\left(\delta_k^h \delta R_{ij} - \delta_j^h \delta R_{ik}\right) + F_k^h \delta P_{ij} - F_j^h \delta P_{ik} + F_i^h \delta P_{[jk]}$$

وبما أن الفضاء K_{n} هو فضاء متماثل تآلفيّاً، عندئذٍ تتحقق العلاقة:

$$R_{ij} = R_{ji}.$$

$$\Longrightarrow \delta R_{ij} = \delta R_{ji}$$

بإجراء عملية التناظر التنسوري للأدلّة i,j,k في العلاقة (33)، نجد:

$$(34)\delta R_{kij}^{h} = \frac{1}{n}\left(\delta_j^h \delta R_{ki} - \delta_i^h \delta R_{kj}\right) + F_j^h \delta P_{ki} - F_i^h \delta P_{kj} + F_k^h \delta P_{[ij]}$$

$$(35)\delta R^h_{jki} = \frac{1}{n}\left(\delta^h_i \delta R_{jk} - \delta^h_k \delta R_{ji}\right) + F^h_i \delta P_{jk} - F^h_k \delta P_{ji} + F^h_j \delta P_{[ki]}$$

بجمع العلاقات (33) وَ(35)و (34) طرف لطرف، نجد:

$$\delta R^h_{ijk} + \delta R^h_{kij} + \delta R^h_{jki} = \frac{1}{n}\left[\left(\delta^h_k \delta R_{ij} - \delta^h_j \delta R_{ik}\right) + \left(\delta^h_j \delta R_{ki} - \delta^h_i \delta R_{kj}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\delta^h_i \delta R_{jk} - \delta^h_k \delta R_{ji}\right)\right] + F^h_k \delta P_{ij} + F^h_k \delta P_{[ij]} - F^h_k \delta P_{ji} + F^h_j \delta P_{ki} +$$
$$+ F^h_j \delta P_{[ki]} - F^h_j \delta P_{ik} + F^h_i \delta P_{jk} - F^h_i \delta P_{kj} + F^h_i \delta P_{[jk]}$$

و بما أنّ: $\delta R^h_{ijk} + \delta R^h_{kij} + \delta R^h_{jki} = 0$، نعوض في العلاقة السابقة، نجد:

$$\frac{1}{n}\left[\delta^h_k\left(\delta R_{ij} - \delta R_{ji}\right) + \delta^h_j\left(\delta R_{ki} - \delta R_{ik}\right) + \delta^h_i\left(\delta R_{jk} - \delta R_{kj}\right)\right]$$
$$+ F^h_k\left(2\delta P_{ij} - 2\delta P_{ji}\right) + F^h_j\left(2\delta P_{ki} - 2\delta P_{ik}\right)$$
$$+ F^h_i\left(2\delta P_{jk} - 2\delta P_{kj}\right) = 0$$

و بما أنّ: $\delta R_{ij} = \delta R_{ji}$، نعوّض في العلاقة السابقة، نجد:

$$F^h_k\left(\delta P_{ij} - \delta P_{ji}\right) + F^h_j\left(\delta P_{ki} - \delta P_{ik}\right) + F^h_i\left(\delta P_{jk} - \delta P_{kj}\right) = 0$$

نجد من العلاقة الأخيرة أنّ:

$$\delta P_{ij} - \delta P_{ji} = 0$$
$$\Longrightarrow \delta P_{ij} = \delta P_{ji}$$

الخلاصة:

في هذا البحث قمنا بدراسة التشوّهات الهولومورفيّة الإسقاطيّة اللامتناهية في الصغر لفضاءات كيلير المكافئيّة نصف المتناظرة وفضاءات كيلير المكافئيّة المتناظرة وفضاءات كيلير المكافئيّة المتماثلة تآلفياً وأوجدنا علاقات هامّة بتأثير هذا التشوّه.

التوصيات.

نوصي بدراسة التشوّهات الهولومورفيّة الإسقاطيّة اللامتناهية في الصغر على فضاءات كيلير المكافئيّة الارتداديّة وفضاءات كيلير آينشتاين المكافئيّة.

قائمة المراجع.

[1] Gavril'chenko, M.L 1989- *Geodesic deformations of Riemannian space*. Diff.Geom. and its Applications, World Sci., Singapore, 47- 53.

[2] Gavril'chenko, M. L, (1972)- *On geodesic deformations of hypersurfaces*, Proc. Conf. Samarkand.

[3] Mikeˇs, J. and Shiha M. and Vanˇzurov´a A, (2009)- "*Invariant objects by holomorhpically projective mappings of parabolically K¨ahler spaces*." J. Appl. Math. 2: 1, pp. 135–141.

[4] Al Lamy Raad J., ˇSkodov´a M., Mikeˇs J, (2006)- *Onholomorphically projective mappings from equiaffine generally recurrent spaces onto projective mappings from equiaffine generally recurrent spaces onto K¨ahlerian spaces*. Arch. Math. Brno 42: 5, 291- 299.

[5] Hinterleitner I, (2015)- *Holomorphically projective mappings of (pseudo-) K¨ahler manifolds preserve the class of differentiability.*Filomat.

[6] Hinterleitner I, (2012)- *On holomorphically projective mappings of e- K¨ahler manifolds.* Arch. Mat. (Brno) 48, 333- 338.

[7]КурчатоваИ.Н., МикешЙ, (1985) Голоморфно_проективныеотображенияк елеровыхпространств. УЧ. пособие.- Одесса: ОГУ, 69с.

[8] Mikeˇs J., Chud´a H., Hinterleitner I, (2014)- *Conformal holomorphically projective mappings of almost Hermitian manifolds with a certain initial condition.* Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 11: 5, 1450044, 8p.

[9] Chud´a H., Chodorov´a M., Shiha M, (2012)- *On composition of conformal and Holomorphically projective mappings between conformally K¨ahlerian spaces.* J. Appl. Math. Bratislava, 5: 3, 91- 96.

[10] نمر إيبو.، *التشوهات الهولومورفيةالإسقاطية اللامتناهية في الصغر في فضاءات كيلير المكافئية.* مجلة جامعة البعث ، المجلد 42 (2020).

[11] نمر إيبو.، *التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر بين فضاءات كيلير المكافئية الهولومورفية الإسقاطية والتشوّهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر للسطوح الفوقية في فضاءات كيلير المكافئية.* مجلة جامعة البعث ، المجلد 43 (2021).

[12] د. طالب غريبة، د. عصام ديبان، د. محسن شيحة، الهندسة التفاضلية، جامعة البعث(2010 م).